Aplicacions de les transformacions de funcions al batxillerat. El cas dels mosaics

Vicenç Font

Departament de Didàctica de les CCEE i de la Matemàtica de la UB. vfont@d5.ub.es

1. Introducció

Janvier (1987) en els seus treballs sobre el concepte de funció considera que les representacions associades al concepte de funció es poden classificar en quatre classes (expressió analítica, taula, gràfic i expressió verbal) que, idealment, contenen la mateixa informació, però que cada una d'elles posa en funció diferents processos cognitius, cada un d'ells estretament relacionat amb els altres. La representació gràfica connecta amb les potencialitats conceptualitzadores de la visualització i es relaciona amb la geometria i la topologia. La representació en forma de taula posa de manifest els aspectes numèrics i quantitatius. L'expressió analítica connecta amb la capacitat simbòlica i es relaciona principalment amb l'àlgebra mentre que la representació verbal es relaciona amb la capacitat lingüística de les persones i és bàsica per interpretar i relacionar les altres tres. Les idees de Janvier, gràcies al seu poder explicatiu i relacional, han donat peu a moltes investigacions posteriors sobre la didàctica de les funcions i s'han concretat en materials que han canviat la manera de treballar les funcions a les aules.

Janvier considera que l'aprenentatge de les funciones no s'ha de limitar al d'una sola d'aquestes formes de representació, sinó que ha d'incloure la capacitat de traduir la informació d'una representació a l'altra. Les possibilitats de recodificar la informació d'una representació amb una altra queden recollides en la taula següent, que és una adaptació de la que proposa Janvier:

de \ a	Descripció verbal	Taula	Gràfica	Expressió analítica
Descripció verbal	Diferents descripcions	Estimació/càlcul de la taula	Croquis/esbós	Model
Taula	Lectura de les relacions numèriques	Modificacions de la taula	Traçat de la gràfica	Obtenció de l'expressió (ajust numèric)
Gràfica	Interpretació de la gràfica	Lectura de la gràfica	Canvis d'escala, d'unitats, etc.	Obtenció de l'expressió (ajust gràfic)
Expressió analítica	Interpretació de la fórmula (interpretació de paràmetres)	Càlcul de la taula donant valors	Representació gràfica	Transformacions de la fórm

Aquesta taula contempla les possibles traduccions d'una forma de representació a l'altra, així com les traduccions dins de la mateixa forma de representació, que són les activitats de la diagonal. Aquestes últimes no estan contemplades en la taula original de Janvier. Aquesta taula també posa de manifest la multiplicitat de relacions que es poden establir entre les diferents formes de representar una funció. El pas de l'una a l'altra pot ampliar i reorganitzar la informació que està implícita en una de les formes de representació.

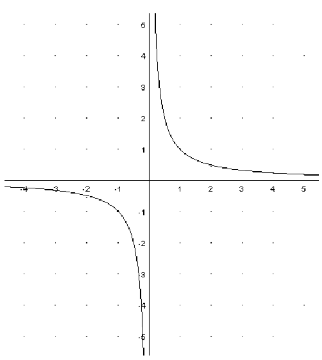
A la casella "Transformacions de la fórmula" hi tenen cabuda totes les transformacions de la fórmula de la funció que porten a una nova expressió equivalent a l'expressió simbòlica inicial de la funció. En concret hi tenen cabuda totes les expressions que porten a entendre una funció f(x) com el resultat d'aplicar transformacions (translació, contracció, dilatació o reflexió) a una altra funció g(x).

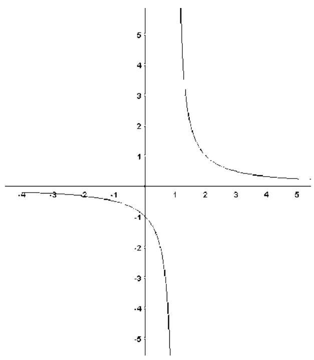
A continuació segueixen exemples de dos tipus d'activitats on la interpretació de l'expressió simbòlica d'una funció com el resultat de l'aplicació de les transformacions de funcions a una altra funció més simple resulta útil.

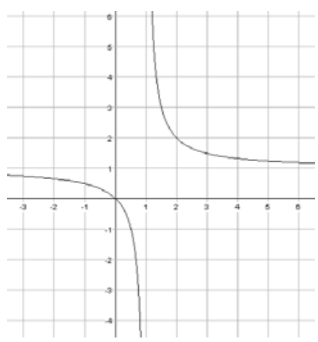
2. Transformacions de funcions i representació gràfica

Les tècniques que es treballen al batxillerat per a representar funcions són: 1) Fer una taula de valors 2) Utilitzar una calculadora gràfica o bé algun graficador de funcions 3) Quan una funció *f(x)* és el resultat d'aplicar alguna transformació (translació, contracció, dilatació o reflexió) a una altra funció *g(x)* de gràfica coneguda, dibuixar la gràfica de *f(x)* a partir de la gràfica de *g(x)* i 4) Representar la funció a partir de buscar el domini, punts de tall amb els eixos, asímptotes i comportament a l'infinit, intervals de creixement i decreixement, màxims i mínims, etc. El segon procediment es basa en el primer ja que els ordinadors representen les gràfiques de les funcions a base de calcular molts punts de la gràfica i d'unir-los mitjançant segments de recta.

El tercer procediment es basa en el fet de poder realitzar canvis en l'expressió simbòlica d'una funció, de manera que com a resultat d'aquests canvis la gràfica de la funció es pugui considerar com el resultat de fer certes transformacions a la gràfica d'una altra funció més fàcil de representar. Aquest procediment sovint s'aplica per a representar paràboles, però es pot aplicar per a representar d'altres tipus de funcions com, per exemple, algunes funcions racionals. Per exemple, si volem representar la funció $f(x) = \frac{x}{x-1}$ basta convertir aquesta expressió en $f(x) = 1+\frac{1}{x-1}$ per poder interpretar la seva gràfica com el resultat de traslladar la funció $g(x) = \frac{1}{x}$ una unitat cap a la dreta i una unitat cap amunt:

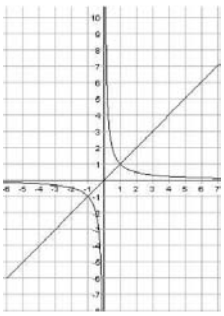


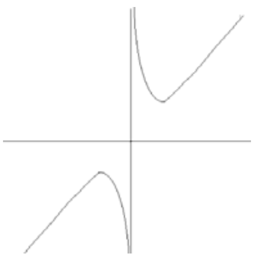




Aquesta tècnica es pot ampliar considerant, a més de les transformacions de les funcions, les operacions entre funcions. Per exemple, si volem representar la funció $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ només cal transformar-la en suma de dues funcions de gràfica coneguda $f(x) = x + \frac{1}{x}$ cada una de les quals es molt fàcil de representar. Si dibuixem superposades les gràfiques de la funció de proporcionalitat $g(x) = x$ i de la funció de proporcionalitat inversa $h(x) = \frac{1}{x}$, tenim les dues gràfiques de l'esquerra. Després n'hi ha prou de considerar el "pes" de cada una d'aquestes dues funcions en l'expressió de $f(x)$ per fer un esbós de la seva gràfica (dreta):

- Per a valors $x < -1$, $g(x) + h(x) \cong g(x)$ (la gràfica és quasi igual que la de la recta).
- Per a $x = -1$, $g(x) + h(x) = -2$.
- Per a valors $-1 < x < 0$, $g(x) + h(x) \cong h(x)$ (la gràfica és quasi igual que la de la hipèrbola).
- Per a valors $0 < x < 1$, $g(x) + h(x) \cong h(x)$ (la gràfica és quasi igual que la de la hipèrbola).
- Per a $x = 1$, $g(x) + h(x) = 2$
- Per a valors $x > 1$, $g(x) + h(x) \cong g(x)$ (la gràfica és quasi igual que la de la recta).

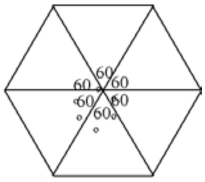


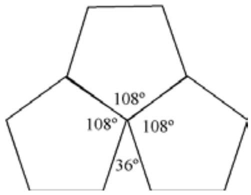


3. Mosaics i transformacions de funcions

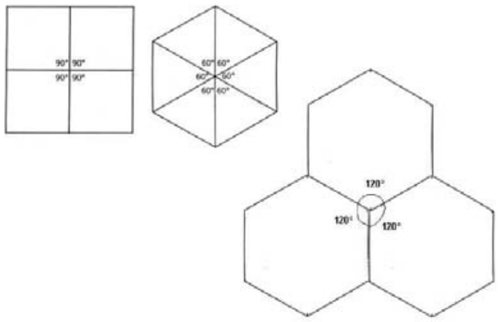
3.1. Mosaics regulars

Els mosaics són construccions geomètriques que resulten de recobrir un pla amb una, o més, figures geomètriques. L'explicació de per què, per exemple, amb els triangles equilàters es pot enrajolar el terra i amb els pentàgons regulars no és ben senzilla. La suma de tots els angles que es troben en un punt ha de ser 360º. Si fem coincidir sis triangles equilàters, donat que cada angle fa 60º, tenim 6·60º = 360º. Però si fem coincidir tres pentàgons, donat que cada angle fa 108º, tenim 3·108º = 324º. Ens en falten 36º per 360º, un angle massa petit per encabir un quart pentàgon.





Utilitzant aquesta condició és molt fàcil arribar a la convicció que entre tots els polígons regulars, només el triangle, el quadrat i l'hexàgon permeten enrajolar el terra.



Arribar a la convicció que només hi ha tres mosaics regulars és una activitat que es pot fer a l'últim cicle de primària -tal com es pot veure, per exemple, visitant la pàgina Web realitzada pels mestres i alumnes del CEIP Pompeu Fabra de Lloret de Mar http://www.xtec.es/ ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/mosaic.htm-. També és una activitat habitual en molts dels llibres de text d'ESO.

3.2. Demostració que només hi ha tres mosaics regulars

Una qüestió que resulta més complicada és demostrar per què només hi ha aquests tres mosaics regulars.

Suposem coneguda la fórmula $\frac{180º\,(n-2)}{n}$, que ens permet saber l'angle interior d'un polígon regular. Com que la suma de tots els angles que es troben en un punt ha de ser 360º, l'angle interior ha de ser un divisor de 360º. És a dir:

$$\frac{180º\,(n-2)}{n} = \frac{360º}{m} \quad (*)$$

on n indica nombre de costats del polígon regular i m el nombre de polígons que envolten un vèrtex. A partir d'aquesta expressió s'arriba a una equació equivalent:

$$\frac{n-2}{n} = \frac{2}{m} \rightarrow (n-2)m = 2n \rightarrow$$

$$\rightarrow nm - 2m - 2n = 0 \rightarrow nm - 2m - 2n + 4 = 4$$
$$(n-2)(m-2) = 4$$

que té com a solucions enteres positives, amb n més gran o igual que tres:

$$n_1 = 3 \text{ i } m_1 = 6\ ;\ n_2 = 4 \text{ i } m_2 = 4\ ;\ n_3 = 6 \text{ i } m_3 = 3$$

Una de les maneres d'arribar a aquest resultat és veure que les possibilitats per escriure 4 com a producte de dos nombres naturals són:

$$1\cdot 4 = 4 \rightarrow n-2 = 1 \text{ i } m-2 = 4 \rightarrow n = 3 \text{ i } m = 6$$

$$2\cdot 2 = 4 \rightarrow n-2 = 2 \text{ i } m-2 = 2 \rightarrow n = 4 \text{ i } m = 4$$

$$4\cdot 1 = 4 \rightarrow n-2 = 4 \text{ i } m-2 = 1 \rightarrow n = 6 \text{ i } m = 3$$

La tècnica que s'ha aplicat a l'apartat anterior és la que s'aplica per resoldre un cas particular de l'equació diofàntica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. La tècnica de resolució d'aquesta equació depèn dels valors d'A, B i C. Els valors d'aquests coeficients determinen diferents tipus d'equacions que reben el nom de les corbes que l'equació representa en el pla: una recta doble, una elipse, una paràbola o una hipèrbola (o un parell de rectes). Aquestes corbes són el conjunt de solucions reals. En les equacions diofàntiques el conjunt de solucions està representat per punts aïllats en el pla amb coordenades enteres. Quan $A = C = 0$ i $B \neq 0$ ens trobem en l'anomenat cas hiperbòlic simple. La resolució es fa de la manera següent:

En ser $A = C = 0$, l'equació original es redueix a $Bxy + Dx + Ey + F = 0$, per tant:

$$\begin{aligned}
Bxy + Dx + Ey + F &= 0\\
Bxy + Dx + Ey &= -F\\
B^2xy + BDx + BEy &= -BF\\
B^2xy + BDx + BEy + DE &= DE - BF\\
(Bx + E)\,(By + D) &= DE - BF
\end{aligned}$$

Els valors de x i y es poden trobar a partir dels divisors de $DE - BF$. Siguin $d_1, d_2, ..., d_n$ tots els divisors de $DE - BF$. Les solucions són:

$$Bx + E = d_i \qquad By + D = \frac{(DE - BF)}{d_i}$$

$$Bx = d_i - E \qquad By = \frac{(DE - BF)}{d_i} - D$$

$$x = \frac{d_i - E}{B} \qquad y = \frac{(DE - BF)}{Bd_i} - \frac{D}{B}$$

3.3. Transformacions de funcions

En el nivell de Batxillerat, una altra manera de demostrar que només són possibles aquestes tres solucions consisteix a interpretar aquestes solucions com a punts de coordenades enteres positives, amb la primera coordenada més gran o igual que tres, de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ ja que l'equació (*) es pot transformar de la manera següent:

$$\frac{180º\,(n-2)}{n} = \frac{360º}{m} \rightarrow (n-2)m = 2n \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \frac{2n}{n-2}$$

Les transformacions permeten ajudar a trobar els punts de coordenades enteres positives amb la primera coordenada més gran o igual que tres. En efecte, la funció $f(x) = \frac{2x}{x-2}$ es pot transformar en $f(x) = 2 + \frac{4}{x-2}$. Per tant, la gràfica d'aquesta funció es pot considerar com la que resulta de fer una translació de dues unitats cap amunt a la gràfica de la funció $f(x) = \frac{4}{x-2}$, la qual al seu torn es pot considerar com la gràfica que resulta de fer una translació de dues unitats cap a la dreta a la gràfica de la funció $f(x) = \frac{4}{x}$, la qual és una dilatació de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$

La funció $f(x) = \frac{1}{x}$ només té un punt amb les dues coordenades enteres positives -el punt (1,1)-. La funció $f(x) = \frac{4}{x}$ només té tres punts de coordenades enteres positives ja que, en multiplicar per quatre les ordenades dels punts de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$, els únics valors tals que el seu producte per 4 sigui un nombre natural són 1, 1/2 i 1/4. Per tant, els punts de coordenades enteres positives són (1,4), (2,2) i (4,1). D'altra banda, aquests tres punts són els únics que en sumar dos a la seva primera coordenada, continuen donant com a resultat punts de coordenades enteres positives: (3,4), (4,2) i (6,1). I aquests tres punts són els únics que en sumar dos a la seva segona coordenada, continuen donant com a resultat punts de coordenades enteres positives: (3,6), (4,4) i (6,3).

D'altra banda, la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ només té un altre punt amb les dues coordenades enteres negatives -el punt (–1,–1)-. La funció $f(x) = \frac{4}{x}$ només té tres punts de coordenades enteres negatives, ja que en multiplicar per quatre les ordenades dels punts de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$, els únics valors que el seu producte per 4 sigui un nombre enter negatiu són –1, –1/2 i –1/4. Per tant, els punts de coordenades enteres negatives són (–1,–4), (–2,–2) i (–4,–1). D'altra banda, aquests tres punts són els únics que en sumar dos a la seva primera coordenada continuen donant com a resultat punts de coordenades enteres: (1,–4), (0,–2) i (–2,1). I aquests tres punts són els únics que en sumar dos a la seva segona coordenada continuen donant com a resultat punts de coordenades enteres: (1,–2), (0,0) i (–2,3).

Per tant, els únics punts de coordenades enteres positives de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{2x}{x-2}$, amb la primera coordenada més gran o igual que tres són: (3,6), (4,4) i (6,3).

3.4. Mosaics semiregulars

Un mosaic semiregular és la composició formada per dos o més tipus de polígons regulars de manera que la distribució dels polígons regulars al voltant de qualsevol vèrtex del mosaic sigui sempre la mateixa. El nombre mínim de polígons regulars és tres ja que si considerem només dos polígons regulars resulta que:

$$\frac{180^o\,(m-2)}{m} + \frac{180^o\,(n-2)}{n} = 360^o$$

$$\frac{m-2}{m} + \frac{n-2}{n} = 2$$

i la suma de dues fraccions inferiors a la unitat no pot ser dos. D'altra banda, el nombre màxim de polígons regulars és 6 ja que no hi ha cap polígon regular amb un angle interior inferior a 60º.

Si intervenen tres polígons regulars de costats *n*, *m* i *p* respectivament s'ha de complir la següent equació:

$$\frac{180^o\,(m-2)}{m} + \frac{180^o\,(n-2)}{n} + \frac{180^o\,(p-2)}{p} = 360^o$$

que simplificada queda: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$

En el cas de quatre polígons regulars s'arriba a la igualtat $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Per a cinc s'arriba a:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2}$$

I per a sis a:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 2$$

La tècnica basada en la transformació de funcions es pot aplicar per investigar quins són els mosaics semiregulars. La investigació que proposem és una modificació de la que es proposa en Alsina, Pérez i Ruiz (1989, p. 104).

Investigació 1:

Les solucions de l'equació $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$ sabem que són 10.

a) Quin és el mosaic regular que resulta de la composició de tres polígons regulars iguals? A partir d'aquest resultat pots trobar una solució de l'equació anterior.

b) Ara volem saber les solucions de l'equació anterior en què intervenen dos polígons regulars iguals. Per trobar-les suposa $m = p$ i aplica la tècnica de les transformacions de funcions.

c) Ara volem trobar totes les solucions en les quals intervé un triangle equilàter. Per trobar-les suposa $p = 3$ i aplica la tècnica de les transformacions de funcions.

d) Ara volem trobar totes les solucions en les quals intervé un quadrat. Per trobar-les suposa $p = 4$ i aplica la tècnica de les transformacions de funcions.

e) Quines són les deus solucions?

Investigació 2:

Les solucions de l'equació
$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ sabem que són 4.

a) Quin és el mosaic regular que resulta de la composició de quatre polígons regulars iguals? A partir d'aquest resultat pots trobar una solució de l'equació anterior.

b) Ara volem saber les solucions de l'equació anterior en les quals intervenen dos quadrats. Per trobar-les suposa $p = q = 4$ i aplica la tècnica de les transformacions de funcions.

c) Ara volem trobar totes les solucions en què intervenen dos triangles equilàters. Per trobar-les suposa $p = q = 3$ i aplica la tècnica de les transformacions de funcions.

e) Quines són les quatre solucions?

Investigació 3:

Les solucions de l'equació
$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{3}{2}$ sabem que són 2 i que en les dues hi ha tres triangles equilàters. Quines són les dues solucions?

Investigació 4:

Les solucions de l'equació

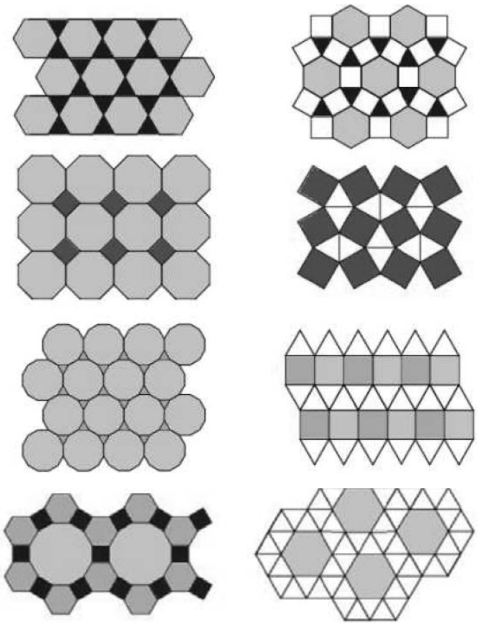
$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=2$$

sabem que només és una. Quina és?

Un cop els alumnes han trobat les 17 solucions, tres d'elles són les formades per tres polígons regulars: (6,6,6), (4,4,4,4) i (3,3,3,3,3,3). En les altres 14 hi intervenen dos o tres polígons regulars diferents, que poden envoltar un vèrtex de diferents maneres. Per exemple, la solució (3,3,3,4,4) permet construir dos mosaics diferents. D'altra banda hi ha solucions que permeten envoltar un vèrtex, però no tots els vèrtexs com, per exemple, la solució (5,5,10). Un cop eliminades les solucions (3,3,4,12), (5,5,10), (4,5,20), (3,7,42), (3,8,24), (3,9,18) i (3,10,15) -aquestes quatre últimes també es poden eliminar pel fet que si hi intervé un triangle equilàter els altres dos polígons han de ser iguals- els alumnes podem trobar tots els mosaics semiregulars realitzant una investigació similar a la que es proposa en Alsina, Pérez i Ruiz (1989, pp. 106-107).

Investigació 5:

De les 17 solucions obtingudes, 3 corresponen als mosaics regulars i 7 no poden formar mosaics. Les 7 restants permeten construir tots els mosaics semiregulars. Explica amb quina solució es correspon cada un d'ells:



4. Conclusió

En aquest article hem mostrat algunes aplicacions pràctiques de les transformacions de funcions que poden donar idees sobre la manera d'ensenyar-les. D'altra banda, considerem que l'aplicació de les transformacions de funcions als mosaics semiregulars tal com s'ha exposat en aquest treball pot ser la base per a un treball de recerca de 2n de batxillerat.

BIBLIOGRAFIA

ALSINA C.; PÉREZ, R.; RUIZ, C. (1989) *Simetría dinámica*. Síntesis: Madrid

JANVIER, C.: (1987). Translation processes in mathematics education, en Janvier, C. (ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pàgs. 27-32). Lawrence Erlbaum A.P.: Hillsdale, New Jersey.