REPRESENTACIONES OSTENSIVAS QUE PUEDEN SER ACTIVADAS EN EL CÁLCULO DE $f'(x)$. EL CASO DE LA FUNCIÓN SENO

VICENÇ FONT
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Introducción

En la actividad matemática hay que de resolver problemas utilizando determinadas técnicas. Estas técnicas necesitan un conjunto organizado de objetos matemáticos que las justifiquen y se plasman en un conjunto de notaciones que son utilizadas en determinadas prácticas. Este conjunto de prácticas se puede parcializar en diferentes clases de prácticas más específicas, que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación, produciendo un determinado sentido. Un cambio de notación puede activar un sentido diferente, o sea, un subconjunto de prácticas públicas y privadas, que pueden facilitar o dificultar la resolución de la actividad. Por este motivo consideramos (Font 2000) que las diferentes representaciones ostensivas[1] de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para su comprensión y, por tanto, para su enseñanza y aprendizaje. Las diferentes formas ostensivas que pueden representar a un objeto (o sistema organizado de objetos) matemático son el resultado de una larga historia en la que a veces introducir una nueva forma de representación plasma un nuevo programa de investigación.

El papel que juegan los ostensivos asociados a un objeto matemático en la construcción de significado es un tema clave para la didáctica de las matemáticas. En este trabajo más que analizar en general el papel que juegan los ostensivos en la producción de sentido nos hemos centrado en el análisis de las representaciones ostensivas asociadas a $f(x)$ y $f'(x)$ que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. En la primera parte sugerimos ejemplos de actividades en las que los alumnos, por propia iniciativa o bien siguiendo las instrucciones del profesor, han de realizar traducciones entre representaciones ostensivas de $f(x)$, traducciones entre representaciones ostensivas de $f'(x)$ o bien han de obtener una representación ostensiva de $f'(x)$ a partir de una representación ostensiva de $f(x)$. En la segunda parte analizamos y comparamos, desde el punto de vista de los ostensivos implicados, diferentes técnicas de cálculo de la derivada de la función seno.

1 Representaciones ostensivas asociadas a $f(x)$ y $f'(x)$ activadas en el cálculo de $f'(x)$

De la investigación didáctica reciente sobre el concepto de función hay que destacar dos tipos de investigaciones: 1) Las que se han ocupado de analizar el papel que juegan las diferentes clases de representación del concepto de función (Borba y Confrey 1996; Fuente y Aranda 1994, Janvier 1987; García 1994; García y Llinares 1994; Romberg, Carpenter y Fennema 1994, Ruthven 1990, Schwartz y Dreyfus 1995) y 2) Las que han analizado la noción de función como proceso y como objeto (Breindenbach y otros, 1992; Dubinsky y Harel 1992; Dubinsky 1991 y 1996; Sfard 1991 y 1992, Slavitt 1997).

Janvier (1987), en sus trabajos sobre el concepto de función considera que las representaciones (aquí llamadas representaciones ostensivas) asociadas al concepto de función se pueden clasificar en cuatro clases (expresión analítica, tabla, gráfica y expresión verbal) que, aunque idealmente contienen la misma información, ponen en función diferentes procesos cognitvos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La representación gráfica conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La expresión analítica conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres. Las ideas de Janvier, gracias a su poder explicativo y relacional, han servido de base a muchas investigaciones posteriores sobre la didáctica de las funcions y se han concretado en materiales de aula que han hecho cambiar la manera de trabajar las funciones[2] en las aulas.

Janvier, entre otros, considera que el aprendizaje de las funciones no se ha de limitar al de una sola de estas formas de representación, sino que ha de incluir la capacidad de traducir la información de una representación a otra.

hacia desde	Situación, Descripción verbal	Tabla	Gráfica	Expresión simbólica
Situación, Descripción verbal	Distintas descripciones	Estimación/cálculo de la tabla	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura de las relaciones numéricas	Modificación de la tabla	Trazado de la gráfica	Ajuste numérico
Gráfica	Interpretación de la gráfica	Lectura de la gráfica	Variaciones de escalas, unidades, origen, etc.	Ajuste gráfico
Expresión simbólica	Interpretación de la fórmula (interpretación de parámetros)	Cálculo de la tabla dando valores	Representación gráfica	Transformaciones de la fórmula

Figura 1. Adaptación de la tabla propuesta por C. Janvier

Esta tabla contempla las posibles traducciones de una forma de representación a otra, así como las traducciones dentro de la misma forma de representación, que son las de la diagonal. La tabla anterior pone de manifiesto la multiplicidad de relaciones que se pueden establecer entre las diferentes formas de representar una función. El paso de una a otra puede ampliar y reorganizar la información que está implícita en una de las formas de representación. Si bien sería deseable que los alumnos trabajasen la traducción entre todos los diferentes tipos de representaciones de las funciones, la introducción de las calculadoras gráficas y los programas informáticos en la enseñanza secundaria permite automatizar y, por tanto, facilitar y simplificar algunas de las posibles traducciones entre las representaciones funcionales.

Los trabajos de Janvier sobre las traducciones entre las formas de representación de una función nos han sugerido la siguiente tabla:

a de	Expresión simbólica $f\,'(x)$	Gráfica $f\,'(x)$	Tabla $f\,'(x)$	Descripción verbal de la situación (en términos de $f\,'(x)$)	Expresión simbólica $f(x)$	Gráfica $f(x)$	Tabla $f(x)$	Descripción verbal de la situación (en términos de $f(x)$)
Expresión simbólica $f(x)$	Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 12			
Gráfica $f(x)$	Ej. 5	Ej. 6	Ej. 7	Ej. 8		Ej. 11		
Tabla $f(x)$								
Descripción verbal de la situación (en términos de $f(x)$)								
Expresión simbólica $f\,'(x)$	**Ej. 10**							
Gráfica $f\,'(x)$								
Tabla $f\,'(x)$	**Ej. 9**							
Descripción verbal de la situación (en términos de $f\,'(x)$)								

Figura 2

En esta tabla tenemos, en las casillas con cuadrícula, las traducciones entre las diferentes formas de representar una función y, en las casillas con rayas, las traducciones entre las diferentes formas de representar la función derivada. Las casillas blancas nos conducen de una forma de representar la función a una forma de representar la función derivada, mientras que las grises nos permiten hallar la primitiva de una función a partir de la función derivada. Cuando consideramos que una de las formas de representación de $f(x)$ es la tabla, nos estamos refiriendo a una tabla de valores y no a las tablas de monotonía que se pueden obtener a partir del estudio del signo de $f'(x)$.

En este artículo hemos partido de la hipótesis (*) que el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ se puede interpretar como un proceso en el que se ha de considerar:

1) Traducciones entre las distintas formas ostensivas de representar $f(x)$

2) El paso de una forma de representación ostensiva de $f(x)$ a una forma de representación ostensiva de $f'(x)$.

3) Traducciones entre las distintas formas ostensivas de representar $f'(x)$.

Este proceso se concreta en diferentes técnicas de cálculo de la función derivada. Un ejemplo de técnica (que más adelante llamaremos técnica 2) que concreta este proceso sería:

Gráfica de $f(x)$ ± Tabla de $f'(x)$ Y Gráfica de $f'(x)$ Y Expresión analítica de $f'(x)$

El primer paso de este esquema indica que la gráfica de $f(x)$ es la forma de representación de la función $f(x)$, que se presenta al alumno como punto de partida para que éste realice las acciones (por ejemplo calcular pendientes) que le permitirán obtener una forma de representación de la función derivada, en este caso, una tabla de valores de $f'(x)$. Los otros dos pasos son traducciones entre diferentes formas de representar la misma función, en este caso la función $f'(x)$. Este tipo de esquemas están formados por un paso que permite obtener una forma de representación de la función derivada $f'(x)$ a partir de una forma de representación de la función $f(x)$, y por otros pasos que son traducciones entre diferentes formas de representación de la misma función. Por tanto, el proceso de la hipótesis (*), se puede descomponer en los siguientes subprocesos:

1) Representación ostensiva de $f(x)$ Y Otras representaciones ostensivas de $f(x)$

2) Representación ostensiva de $f(x)$ ± Representación ostensiva de $f'(x)$

3) Representación ostensiva de $f'(x)$ Y Otras representaciones ostensivas de $f'(x)$

A continuación siguen ejemplos de actividades, entendidas en sentido amplio y a nivel de bachillerato, en las que el alumnado ha de realizar alguno de estos tres subprocesos. Los ejemplos no contemplan todas las posibilidades de la tabla de la figura 2, pero sí algunas de las que consideramos más relevantes para el cálculo de $f'(x)$.

Ejemplo 1. Expresión simbólica de $f(x)$ ± Expresión simbólica de $f'(x)$

La forma habitual de calcular la expresión simbólica de la función derivada consiste en calcular el límite $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ utilizando la expresión simbólica de la función $f(x)$.

Ejemplo 2. Expresión simbólica de $f(x)$ *± Gráfica de* $f'(x)$

Un ejemplo de este subproceso sería dibujar la gráfica de la recta horizontal $y = 3$ a partir de la fórmula de una recta, por ejemplo $f(x) = 3x+2$. Otro ejemplo es el procedimiento que permite obtener la gráfica de la función derivada a partir de la expresión simbólica de $f(x)$, utilizando un graficador para representar la función $pf_h(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (función gradiente o función pendiente de la función $f(x)$ según un incremento h) con h suficientemente pequeño. La gráfica que dibuja el graficador se puede considerar que es "casi" la gráfica de la función derivada.

Ejemplo 3. Expresión simbólica de $f(x)$ *± Tabla de* $f'(x)$

Para introducir el concepto de función derivada es conveniente primero calcular la derivada de una función en diferentes puntos y confeccionar una tabla con los valores obtenidos.

Actividad: La tabla siguiente recoge valores de la derivada de la función $f(x) = x^2$ en diferentes puntos que se han calculado en otras actividades, utilizando la expresión $f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

abscisa	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
derivada	*-2*	*0*		*4*		*8*

Calcula $f'(1)$ y $f'(3)$ y completa la tabla

Hay alumnos que responden a la actividad anterior calculando $f'(1)$ y $f'(3)$ utilizando la definición de derivada en un punto, pero hay otros que observan que los valores de la derivada siempre son el doble de los valores de la abscisa y responden que $f'(1) = 2$ y $f'(3) = 6$ sin necesidad de hacer ningún cálculo.

Ejemplo 4. Expresión simbólica de $f(x)$ *± Descripción verbal de la situación en términos de* $f'(x)$

Se realiza en situaciones contextualizadas cuando, a partir de la fórmula de la función, tenemos que dar una descripción de la situación en términos de derivada.

Actividad: La fórmula que permite obtener el espacio recorrido por un corredor en función del tiempo es $f(x) = 4x$. ¿Su velocidad instantánea es constante o bien va variando?

Ejemplo 5. Gráfica de $f(x)$ ± Expresión simbólica de $f\,'(x)$

A partir de la gráfica de la función el alumnado ha de hallar una condición que cumplan todas las tangentes. La simbolización de esta condición permite hallar la expresión simbólica de la función derivada. El ejemplo paradigmático es el cálculo de la función derivada de las funciones de proporcionalidad directa y de las funciones afines.

Actividad: a) Dada la función de proporcionalidad $y = ax$ y un punto de abscisa x_0, ¿Cuál es la recta tangente a la función en este punto? ¿Y la pendiente?

b) Justifica que la función derivada de la función de proporcionalidad $f(x) = ax$ es la función $f\,'(x)=a$

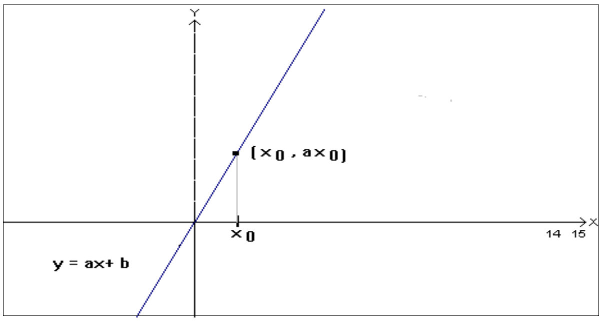

Figura 3

Ejemplo 6. Gráfica de $f(x)$ ± Gráfica de $f\,'(x)$

Este subproceso se realiza en situaciones en las que se ha de confeccionar la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función analizando los intérvalos en los que la función crece, decrece, máximos y mínimos, etc.

Actividad: A partir de la gráfica de la función $f(x)$ dibuja un esbozo de la gráfica de su función derivada.

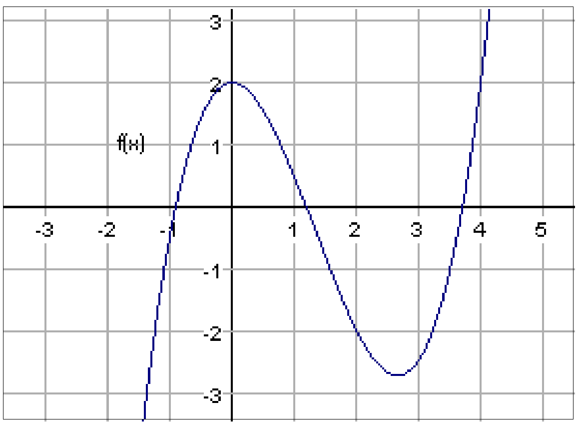

Figura 4

Ejemplo 7. Gráfica de $f(x)$ ± Tabla de $f'(x)$

Actividad: a) Calcula la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 5$
b) Mueve el punto *esq* y completa la tabla siguiente:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
pendiente de la recta tangente												

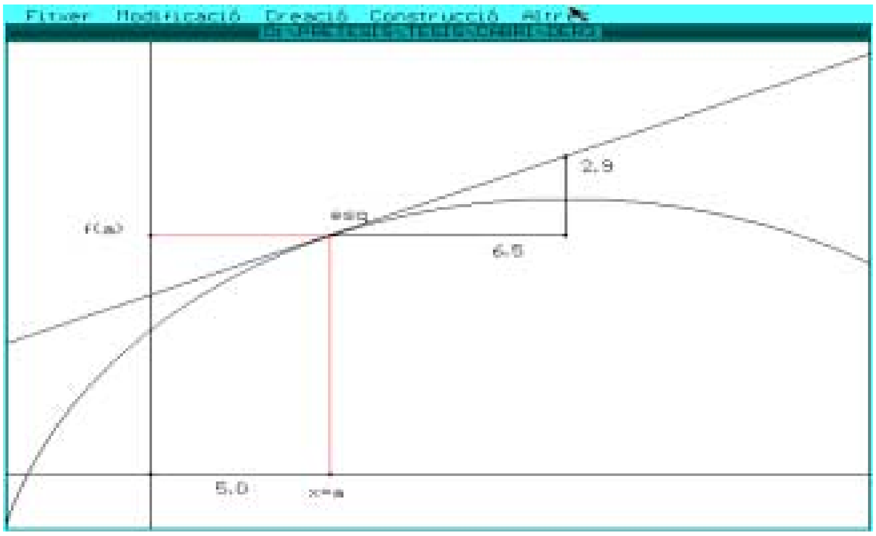

Figura 5

Ejemplo 8. Gráfica de $f(x)$ ± Descripción verbal en términos de $f'(x)$

Actividad: La ilustración siguiente nos muestra lo bien que lo pasa un esquiador.

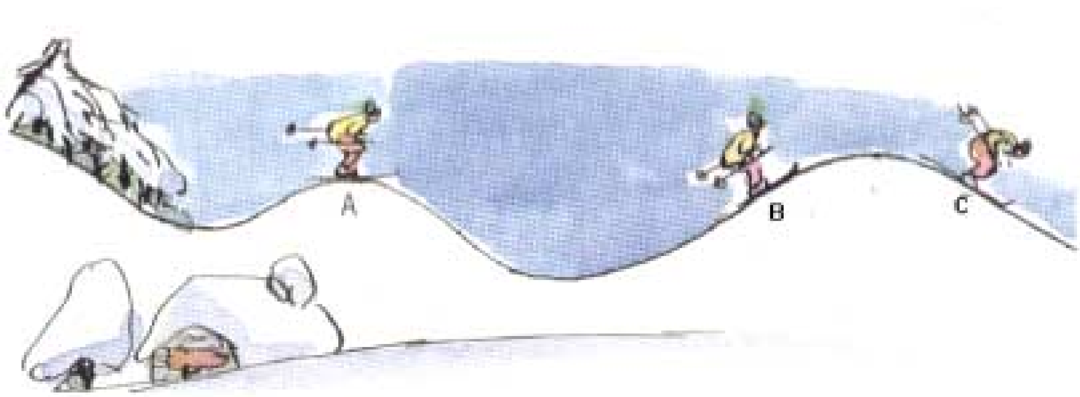

Figura 6

a) ¿En cuál de estos tres momentos le cuesta más esquiar? ¿Por qué?

b) Utiliza una regla y prolonga los esquíes en los puntos *A*, *B* y *C*. ¿Qué clase de recta se obtiene?.

c) Si consideramos que el perfil de la montaña es la gráfica de una función, ¿ Cuál es el valor de la derivada de la función en *A*? ¿Qué signo tiene la derivada de la función en los puntos *B* y *C*?

Ejemplo 9. Tabla de $f'(x)$ Y *Expresión simbólica de* $f'(x)$

Actividad: Si ahora quisiéramos calcular la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = x^2$ en los puntos de abscisa $x = -7$, $x = -12$, $x = -15$, $x = 10$, $x = 21$ y $x = 40$ tendríamos que calcular $f'(-7)$, $f'(-12)$, $f'(-15)$, $f'(10)$, $f'(21)$ y $f'(40)$, pero antes completaremos la tabla siguiente con los valores de la derivada de la función $f(x) = x^2$ en diferentes puntos que ya hemos calculado en actividades anteriores:

abscisa	-1	0	1	2	3	4
derivada	-2	0	2	4	6	8

a) A partir de la tabla halla una fórmula que, sabiendo el valor de la abscisa, nos permita calcular la derivada de la función $f(x) = x^2$ para este valor de la abscisa.

b) Utilizando esta fórmula calcula $f'(-7)$, $f'(21)$ y $f'(40)$.

Ejemplo 10. Expresión simbólica de f '(x) Y *Expresión simbólica de f '(x)*

Este tipo de traducción la encontramos para una función cualquiera cuando se pasa de la expresión $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ a la expresión $f'(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y también para funciones particulares. Por ejemplo:

Función	Función derivada	Transformación de la derivada
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$f(x) = \text{cotg } x$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$f'(x) = -1 - \text{cotg}^2 x$

Ejemplo 11. Gráfica de $f(x)$ Y *Gráfica de* $f(x)$

Este tipo de transformación aparece cuando se realiza un zoom de la gráfica de una función. Por ejemplo, cuando se pretende hacer observar a los alumnos que la recta tangente es la que más se aproxima a la gráfica de la función en las proximidades del punto.

Ejemplo 12. Expresión simbólica de $f(x)$ Y *Expresión simbólica de* $f(x)$

Este tipo de traducción es muy importante cuando se aplican las reglas de derivación. Por ejemplo, para calcular la derivada de la función $f(x) = \log_a x$, el hecho de considerar la transformación $\log_a x = k \cdot \ln x$, permite calcular la derivada de la función $f(x) =$ $\log_a x$ de la manera siguiente: $f'(x) = k \cdot (\ln x)' = k\dfrac{1}{x} = \dfrac{k}{x}$

donde k es igual a $\log_a e$ o bien $\dfrac{1}{\ln a}$. Por tanto:

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} \quad \text{o bien} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

2 Análisis de diferentes técnicas para calcular la derivada de la función seno.

A continuación ilustraremos con un ejemplo las diferentes técnicas de cálculo de funciones derivadas en las que se puede concretar el proceso de la hipótesis (*),

Ejemplo: Análisis de diferentes técnicas para calcular la derivada de la función seno desde el punto de vista de las representaciones ostensivas implicadas.

Empezaremos con la técnica habitual para calcular la derivada de la funció seno; a continuación comentaremos algunas alternativas en las cuales interviene el reconocimiento de la gráfica de la función coseno**.** Seguidamente, comentaremos una nueva alternativa de cálculo de la función derivada inspirada en las ecuaciones diferenciales. Finalmente, valoraremos las diferentes técnicas desde el punto de vista de las representaciones ostensivas implicadas.

2.1 La derivada de la función seno en los libros de texto (técnica 1)

El cálculo de las derivadas de las funciones trigonométricas elementales contempladas en el currículum del bachillerato se concreta en diferentes secuencias de actividades en los libros de texto. Una lectura de los textos escolares actuales[3] pone de manifiesto una cierta estructura común en la mayoria de ellos. Esta estructura consiste en:

1 Calcular la derivada de la función $f(x)$ = sen x directamente a partir de la definición de la función derivada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$$

de la manera siguiente:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\cdot sen\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2})\cdot\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2})\cdot\lim_{h\to 0} \frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0} \cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x$$

2 Calcular las derivadas de las otras funciones trigonométricas indirectamente, es decir a partir de la regla de la cadena y la regla de la derivada del cociente.

El primer punto de esta secuencia necesita:

1 demostrar previamente que $\lim_{h\to 0} \frac{sen\, h}{h} = 1$

2 Utilizar las fórmulas trigonométricas que convierten una diferencia de senos en un producto: $senA - senB = 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot sen\frac{A-B}{2}$ (con $A = x + h$ y $B = x$).

Desde el punto de vista de las representaciones implicadas, esta demostración es del tipo:

Expresión simbólica de $f(x) \pm$ Expresión simbólica de $f'(x)$

ya que la expresión simbólica de $f(x)$ es la forma de representación de la función $f(x)$ que se presenta al alumno como punto de partida de las acciones que permiten obtener una forma de representación de la función derivada, en este caso la expresión simbólica de $f'(x)$. Sabemos que la comprensión del cálculo de la derivada de la función seno por este método resulta difícil de entender para la mayoría de los alumnos y, además, consume cierto tiempo. Si a estos dos elementos añadimos que una de las características del contrato didáctico vigente en la enseñanza secundaria es la obligación del profesor de “enseñar a utilizar determinados algoritmos” tenemos como resultado que la mayoría del profesorado se ahorra esta demostración, aunque esté explicada en el libro de texto, y se preocupa básicamente de que los alumnos dominen la técnica de la derivación.

2.2 Alternativas en las que el alumno ha de reconocer la gráfica de la función coseno

A continuación siguen dos secuencias (alternativas 1 y 2) para calcular la derivada de la función seno en las que los alumnos han de reconocer la gráfica de la función coseno.

2.2.1 Alternativa 1 (técnica 2)

Consiste en desarrollar el proceso siguiente:

Gráfica de $f(x)$ ± Tabla de $f'(x)$ Y Gráfica de $f'(x)$ Y Expresión simbólica de $f'(x)$

El primer paso de este esquema indica que la gráfica de $f(x)$ es la forma de representación de la función $f(x)$ que se presenta a los alumnos como punto de partida para que éstos realicen las acciones (por ejemplo calcular pendientes) que les permitan obtener una forma de representación de la función derivada; en este caso, una tabla de valores de $f'(x)$. Los otros dos pasos son traducciones entre diferentes formas de representar la misma función; en este caso, la función $f'(x)$.

1 Gráfica de $f(x)$ ± Tabla de $f'(x)$

El primer paso de este esquema se puede conseguir a partir de la gráfica de la función seno si el alumno sabe utilizar un Amedidor de pendientes@. Otra posibilidad consiste en presentar a los alumnos una gráfica en papel milimetrado de la función seno en la que se han dibujado rectas tangentes en diferentes puntos, para que ellos calculen las pendientes de estas rectas. El cálculo de pendientes se puede facilitar utilizando un graficador, por ejemplo el programa Calcula[4], que permite calcular diferentes valores de $f'(x)$ a partir de la gráfica de la función seno.

2 Tabla de $f'(x)$ Y Gráfica de $f'(x)$

A partir de la tabla de valores, los alumnos han de dibujar una gráfica en papel milimetrado.

3 Gráfica de $f'(x)$ Y Expresión simbólica de $f'(x)$

El alumno ha de reconocer que la gráfica que ha obtenido es la de la función coseno.

En esta alternativa el punto de partida es la gráfica de $f(x)$ y su expresión simbólica no se utiliza. Dicho de otra manera, si el alumno no supiera que la gráfica que le dan es la de la función seno, podría llegar al mismo resultado.

2.2.2 Alternativa 2 (técnica 3)

Otra alternativa diferente (Tall 1992) consiste en desarrollar el proceso siguiente:

Expresión simbólica de $f(x)$ ± Gráfica de $f'(x)$ Y Expresión simbólica de $f'(x)$

1 Expresión simbólica de $f(x)$ ± Gráfica de $f'(x)$

Una manera de obtener la gráfica de la función derivada a partir de la expresión simbólica de $f(x)$ consiste en utilizar un graficador para representar la función $pf_h(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (función gradiente o función pendiente de la función $f(x)$ según un incremento h) con h suficientemente pequeño. La gráfica que dibuja el graficador se puede considerar que es la de la función derivada.

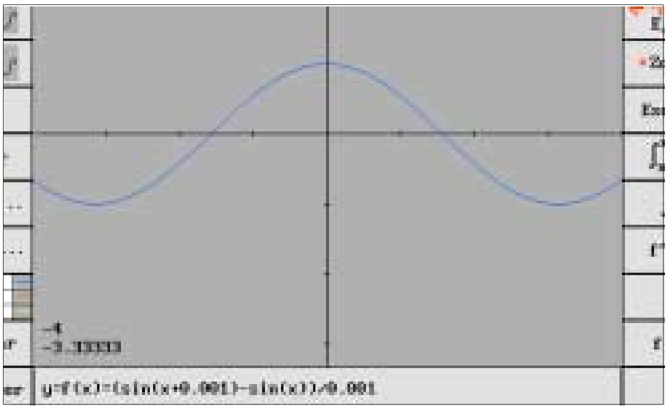

Figura 7

2 Gráfica de $f'(x)$ Y Expresión simbólica de $f'(x)$

El alumno ha de reconocer que la gráfica que ha obtenido es la de la función coseno.

El último paso de las dos alternativas anteriores supone que el alumno es capaz de reconocer la gráfica de la función coseno que tiene en el papel milimetrado o en la pantalla del ordenador.

2.3 Alternativas relacionadas con la ecuación diferencial $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = 1$

La función seno es una solución de la ecuación diferencial: $(f(x))^2 + (f'(x))^2 = 1$. De esta ecuación diferencial se deduce el siguiente procedimiento que permite dibujar la recta tangente en un punto cualquiera de la gráfica de la función seno:

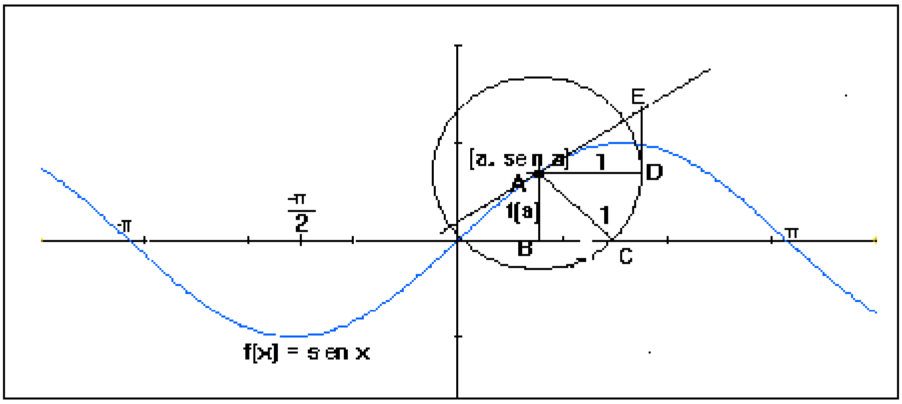

Figura 8

1 Dibuja una circunferencia de radio 1 con centro en (a, sen a) y determina el punto de corte con el eje de abscisas cuya abscisa es > a (el punto C que se encuentra a la derecha de a).

2 Dibuja una recta paralela al eje de abscisas que pase por el punto (a, sen a) y determina el punto de corte con la circunferencia anterior cuya abscisa es > a (el punto D que se encuentra a la derecha de (a, sen a)).

3 Mide el segmento del eje horizontal que tiene por origen (a , 0) y por extremo el punto determinado en el primer paso (el segmento BC).

4 Con origen en el punto D, dibuja un segmento vertical de igual longitud que el segmento BC con extremo E, de mayor ordenada que D si la función es creciente en $x = a$ y menor ordenada si es decreciente (hacia arriba si la función es creciente y hacia abajo si es decreciente) y marca el extremo (punto E).

5 Dibuja la recta que pasa por el punto obtenido en el paso anterior y por el punto (a, sen a)

2.3.1 Alternativa 3 (tècnica 2)

En el anexo 1 tenemos un cuestionario en el que los alumnos tienen que aplicar este procedimiento para:

1) Dibujar tangentes a la gráfica de la función seno en diferentes puntos

y a continuación:

2) Calcular sus pendientes y confeccionar una tabla de $f\,'(x)$.

3) Dibujar una gráfica a partir de la tabla anterior

4) Reconocer la gráfica anterior como la de la función coseno.

En este cuestionario tenemos una variación de la alternativa 1 y, por tanto, seguimos con la técnica 2:

Gráfica de $f(x)$ ± Tabla de $f\,'(x)$ Y Gráfica de $f\,'(x)$ Y Expresión simbólica de $f\,'(x)$

2.3.2 Alternativa 4 (técnica 4)

En el cuestionario 2 (ver anexo 2) se propone a los alumnos una actividad guiada en la cual, a partir del análisis del procedimiento que permite dibujar la recta tangente a la función seno en cualquier punto, el alumnado tenia que:

a) Justificar que $DE = f\,'(a)$ i $BC = f\,'(a)$

b) Utilizar el triángulo siguiente y la igualdad $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, para demostrar que $f'(x) = \pm\cos x$

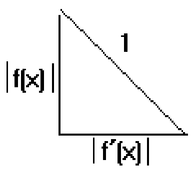

Figura 9

c) Comparar el signo de -cos x con el crecimiento y el decrecimiento de la función seno y explicar por qué no es posible la solución $f\,'(x) = -\cos x$

En esta actividad, además de utilitzar la gráfica de la función y el procedimiento anterior, se ha de utilizar que la expresión simbólica de la gráfica es $f(x) = \text{sen}\, x$ y, por tanto, tenemos una nueva técnica que responde al esquema:

Gráfica de $f(x)$/Expresión simbólica de $f(x)$ ± Expresión simbólica de $f\,'(x)$

Con este esquema, simbolizamos que el punto de partida de las acciones de los alumnos (aplicar el procedimiento para dibujar tangentes) es la gráfica de la función. La expresión simbólica de $f(x)$ es necesaria para simbolizar la condición que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, la cual nos permite deducir la expresión simbólica de $f\,'(x)$. Si los alumnos han practicado el cálculo de la pendiente de una recta y el significado geométrico de la derivada en un punto, pueden llegar a descubrir fácilmente que $f\,'(a) = DE/1 = DE$ y que, por tanto, $f\,'(a) = BC$. También pueden entender la siguiente demostración:

$$*f(x)*^2 + *f\,'(x)*^2 = 1$$
$$*f\,'(x)*^2 = 1 - \sin^2 x$$

$$f'(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\cos x$$

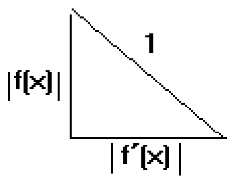

Figura 10

y, a partir de la relación entre el signo de la derivada y el crecimiento de la función seno, pueden descartar la posibilidad $f\,'(x) = -\cos x$, siempre que hayan trabajado anteriormente la relación entre la gráfica de la función y el signo de la función derivada.

3 Conclusiones

1) Si analizamos las cuatro técnicas que hemos comentado para calcular la derivada de la función seno desde el punto de vista de las representaciones ostensivas implicadas, tenemos la tabla seguiente:

Método tradicional (Técnica 1)	Expresión simbólica de $f(x)$ ± Expresión simbólica de $f\,'(x)$
Alternativa 4 (Técnica 4)	Gráfica de $f(x)$/Expresión simbólica de $f(x)$ ± Expresión simbólica de $f\,'(x)$
Alternativa 2 (Técnica 3)	Expresión simbólica de $f(x)$ ± Gráfica de $f\,'(x)$ Y Expresión simbólica de $f\,'(x)$
Alternativas 1 y 3 (Técnica 2)	Gráfica de $f(x)$ ± Tabla de $f\,'(x)$ Y Gráfica de $f\,'(x)$ Y Expresión simbólica de $f\,'(x)$

En esta tabla se puede observar que lo que se pierde en rigor se gana en el número de representaciones ostensivas implicadas. Esto nos lleva a considerar que el número de representaciones implicadas en una actividad ha de ser un elemento, tanto o más importante que el rigor o la generalidad del procedimiento, en el momento de decidirnos por una actividad u otra, ya que a mayor número de representaciones implicadas, mayor número de funciones semióticas.

2) La tabla de la figura 2 que relaciona los ostensivos de $f(x)$ con los de $f\,'(x)$ abre la posibilidad de efectuar un análisis del cálculo de primitivas desde el punto de vista de las representaciones ostensivas implicadas, análogo al que aquí hemos realizado para el cálculo de derivadas.

3) Consideramos que el ejemplo analizado ilustra claramente la potencia de la hipótesis (*) para analizar secuencias de actividades que tienen como objetivo el cálculo de la función derivada. Las diferentes técnicas que hemos analizado nos llevan a proponer que las actividades de enseñanza-aprendizaje diseñadas para trabajar el cálculo de la función derivada a nivel de bachillerato tengan por objetivo que los alumnos puedan entender el esquema siguiente y las técnicas de cálculo de funciones derivadas que de él se desprenden .

ESQUEMA PARA CALCULAR LA FUNCIÓN DERIVADA

¿Cómo se calcula $f'(x)$?

- Directamente
  - 1) Utilizando límites
    - Calcular $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
  - 2) Gráficamente
    - 1) Hallar una condición que cumplan todas las rectas tangentes
    - 2) Calcular $f'(x)$ a partir de la condición anterior
  - 3) Aproximadamente
    - 1) Dibujar la gráfica de $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para un valor de h muy pequeño
    - 2) Considerar que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \bullet \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$
    - 3) Hallar la expresión de $f'(x)$ a partir de la gráfica de $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- Indirectamente
  - 4) Utilizando las reglas de derivación, la derivación logarítmica, etc.

Notas finales

1 Utilizamos el término ostensivo en el sentido de que se puede mostrar a otro directamente.Por representación ostensiva entendemos, por ejemplo, la fórmula de la función que el profesor escribe en la pizarra y el alumno ve directamente.

2 Por ejemplo, el libro “El lenguaje de las funciones y las gráficas” del Shell Centre for Mathematical Education” (1990). O el crédito variable de ESO “Lectura i representació de gràfics” (Font y Bujosa 1995).

3 Siguen el procedimiento habitual: 1) Colera, J.; de Guzmán, M.; Salvador, J. (1995) *Matemáticas de 3º de BUP*. Anaya. Madrid.; 2) Álvarez, F.; García, C.; Garrido, L.M.; Vila, A. (1987) *Factor-3: Matemáticas de 3º de BUP*. Vicens-Vives: Barcelona.; 3) Besora, J.; Jané, A.; Guiteras, J.M.: (1998). *Matemàtiques de 1r de Batxillerat* (Modalidad Ciencias/Tecnología). McGraw-Hill: España.

Sigue una variación del procedimiento habitual: Anzola, M.; Vizmanos, J.R. (1997) *Matemáticas de 3º de BUP*. SM : Madrid.

Sigue la técnica 3 y el procedimiento habitual: 1) Bujosa, J.M.; Cañadilla, J.L.; Fargas, M.; Font, V. (1997). *Matemàtiques de 1r de Batxillerat* (Modalidad Ciencias/Tecnología). Castellnou: Barcelona.; 2) Bujosa, J.M.; Cañadilla, J.L.; Fargas, M.; Font, V. (1998). *Matemàtiques de 2n de Batxillerat* (Modalidad Ciencias/Tecnología). Castellnou: Barcelona. (la demostración tradicional está como ampliación en el libro de 2º)

4 CALCULA (Oliveró, M; Abrev, J.: 1988. Grupo Editorial Iberoamérica) es un graficador que permite efectuar los pasos siguientes:

- Dibujar la gráfica de la función $f(x)$ = sen x
- Por un punto cualquiera $x = a$ dibujar la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ = sen x con un triángulo de base 1 y de altura la pendiente de la recta tangente ($f'(a)$).
- Mover el punto anterior sobre la gráfica de la función $f(x)$ = sen x utilizando el teclado (o el ratón) del ordenador para obtener diferentes valores de $f'(a)$.

Bibliografia

BORBA, M.C.; CONFREY, J.: (1996). A student’s construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational Studies in Mathematics*, n. 31, págs. 319-337.

BREIDENBACH, D.; DUBINSKY, E.; HAWKS, J.; NICHOLS, D.: (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics,* n. 23, págs. 247-285.

DUBINSKY , E.: (1991). Reflective Abstracción in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (ed.): *Advanced mathematical thinking* (pàgs. 95-123). Dordrecht. Kluwer A. P.

DUBINSKY , E.; HAREL, G. (eds.): (1992). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington D.C: MAA Notes 25.

DUBINSKY, E.: (1996) Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática,* 8, 3, págs. 24-41.

FONT, V.; BUJOSA, J.M.: (1995). *Lectura i representació de gràfics*. Barcelona: Castellnou.

FONT, V.: (2000) *Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades.* Tesis doctoral. Universidad de Barcelona

FUENTE de la, M.; ARANDA, D.: (1994) Sobre gráficas y funciones en la ESO. *Uno,* n. 2, págs. 109-119.

GARCÍA, F.J.: (1994). Funciones de la calculadora gráfica. *Uno*, n. 2, págs 103-108.

GARCÍA, M.; LLINARES, S.: (1994). Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. *Suma*, n. 18, págs. 13-23.

JANVIER, C.: (1987). Translation processes in mathematics education, en Janvier, C. (ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (págs. 27-32). Hillsdale, New Jersey : Lawrence Erlbaum A.P.

ROMBERG, T.; CARPENTER, T.; FENNEMA, E.; (1994). *Integrating research on the graphical representation of functions*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum.

RUTHVEN, K.: (1990). The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms. *Educational Studies in Mathematics*, n. 21, págs. 431-450.

SCHWARTZ, B.; DREYFUS, T.: (1995). New actions upon old objects: A new ontological perspective on functions. *Educational Studies in Mathematics,* n. 29, págs 259-291.

SFARD, A.: (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, n. 22, págs. 1-36.

SFARD, A.: (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function, en E. Dubinsky y G. Harel (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington D.C: MAA Notes 25, págs 59-84.

SHELL CENTRE FOR MATHEMATICS EDUCATION (1990). *El lenguaje de funciones y las gráficas*. Madrid: MEC.

SLAVITT, D.: (1997). An alternative route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, n. 33, págs. 259-281.

TALL, D. (1992): L'enseignement de l'analyse a l'age de l'informatique. en B. Cornu (ed.) *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (págs. 161-182). Paris: Presses Universitaires de France.

ANEXO 1

A continuación tienes un procedimiento que permite dibujar la recta tangente a la función seno en cualquier punto.

Procedimiento

1. Dibuja una circunferencia de radio 1 con centro en (a, sen a) y determina el punto de corte con el eje de abscisas cuya abscisa es > a (el punto C que se encuentra a la derecha de a).
2. Dibuja una recta paralela al eje de abscisas que pase por el punto (a, sen a) y determina el punto de corte con la circunferencia anterior cuya abscisa es > a (el punto D que se encuentra a la derecha de (a, sen a)).
3. Mide el segmento del eje horizontal que tiene por origen (a , 0) y por extremo el punto determinado en el primer paso (el segmento BC).
4. Con origen en el punto D, dibuja un segmento vertical de igual longitud que el segmento BC con extremo E, de mayor ordenada que D si la función es creciente en $x = a$ y menor ordenada si es decreciente (hacia arriba si la función es creciente y hacia abajo si es decreciente) y marca el extremo (punto E).
5. Dibuja la recta que pasa por el punto obtenido en el paso anterior y por el punto (a, sen a)

1 a) En la figura siguiente completa el paso 5 del procedimiento anterior. ¿Has obtenido la recta tangente?

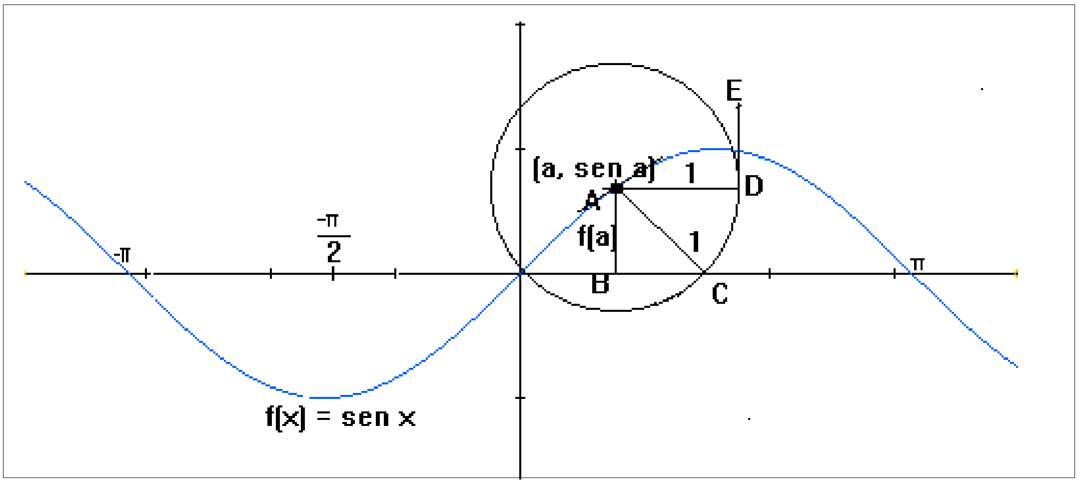

Figura 11

b) Utilizando la gráfica de la función seno que se adjunta calcula $f\,'(0{,}4)$

c) Utilitzando la gráfica de la función seno que se adjunta completa los pasos 2-5 del procedimiento anterior y calcula $f\,'$(-B/2) y $f\,'(2{,}2)$.

d) Utilizando este procedimiento para dibujar las rectas tangentes y calculando sus pendientes hemos encontrado la siguiente tabla. Completala a partir de los resultados que has obtenido en los apartados b i c.

x	-B	-3	-2,2	-2	-B/2	-1	-0,4	0	0,4	0,8	1,4	B/2	2	2,2
$f\,'(x)$	-1	-0,99		-0,4		0,5		1		0,7	0,17			

e) Representa la tabla en papel milimetrado y dibuja la gráfica de la función $f\,'(x)$.¿Qué gráfica has obtenido? ¿Qué fórmula tiene la derivada de la función seno?

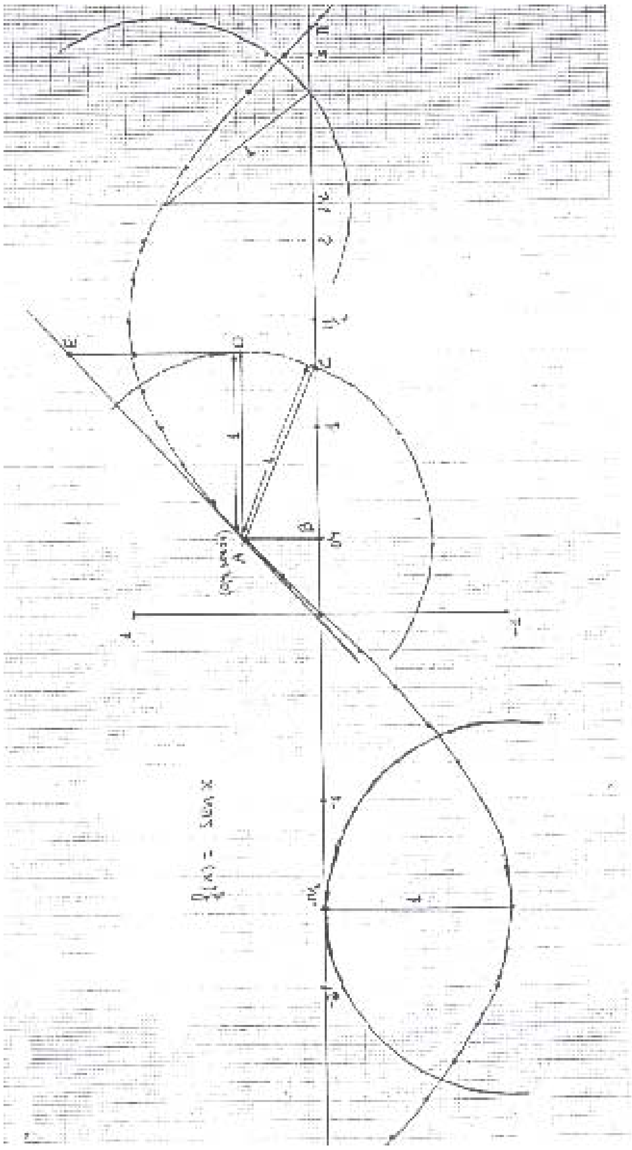

Figura 12

ANEXO 2

2 Podemos llegar al mismo resultado del problema anterior analizando el procedimiento que hemos utilizado para dibujar las rectas tangentes.

a) Explica por qué $DE = f\,'(a)$ y $BC = f\,'(a)$

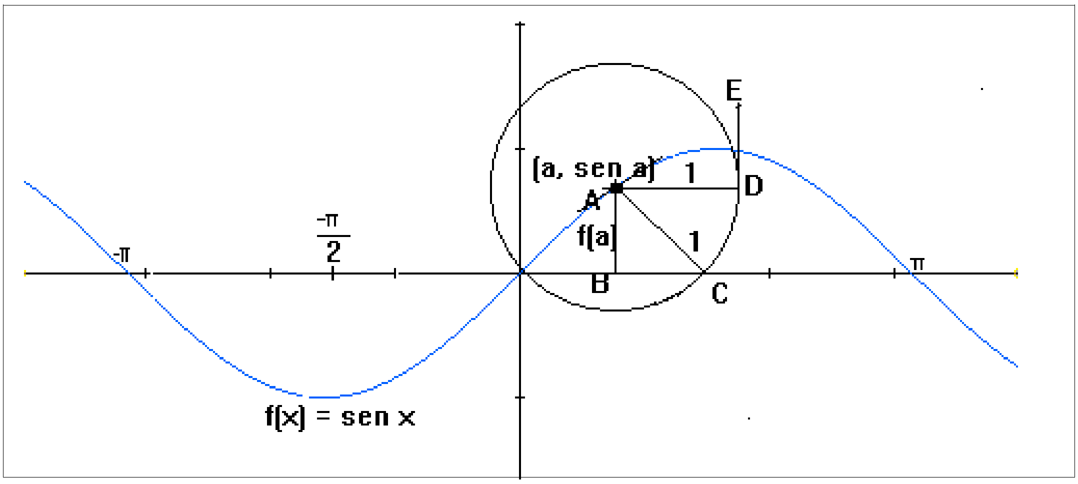

Figura 13

b) Utilizando el triángulo de la figura siguiente y que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, demuestra que $f'(x) = \pm\cos x$

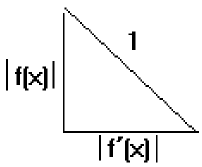

Figura 14

c) Compara el signo de - cos x con el crecimiento y decrecimiento de la función seno y explica por qué no es posible la solución $f\,'(x) = -\cos x$