Font (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo Della derivata, in G. Arrigo (ed.) Atti del Convegno di didáctica Della matematica 2008 (13-24). Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza.

REPRESENTACIONES ACTIVADAS EN EL CÁLCULO DE *f´*(*x*)

Vicenç Font

Universidad de Barcelona

Resumen: El interés por buscar alternativas a la definición de la función derivada por límites lleva a la siguiente pregunta: ¿Cómo calcular $f´(x)$ a partir de $f(x)$? Esta pregunta se responde primero teniendo en cuenta las representaciones de $f(x)$ y $f'(x)$ activadas en el cálculo de la función derivada, para después incorporar otros aspectos que también se han de tener en cuenta, entre otros, la dualidad particular-general o las metáforas utilizadas en el discurso del profesor y en el de los alumnos.

1. EL CÁLCULO DE *f´(x)* SIN UTILIZAR LA DEFINICIÓN POR LÍMITES.

Las nociones de derivada en un punto y de función derivada son tradicionalmente difíciles de comprender para muchos de los alumnos de bachillerato. Las dificultades se encuentran precisamente en las definiciones de estas nociones usando límites, y no tanto en la aplicación de las reglas formales o en el uso de las fórmulas. El siguiente episodio de aula es una buena muestra de dicha dificultad:

Diálogo 1[1]

Después de que el profesor haya introducido en clases anteriores la derivada en un punto como $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y justo después de haber introducido la función derivada como $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se produjo el siguiente diálogo:

> Alumna (Laura): ¿Qué diferencia hay entre la definición de función derivada y la definición de derivada en un punto?
>
> Profesor: La derivada en un punto es $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, en esta expresión la *a* es fija, no varia, lo que varia es la *h*. En cambio, en el caso de la función derivada $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, primero has de suponer que la *x* no varía y que sólo varía la *h* para obtener $f'(x)$, y después has de suponer que la *x* varía. Por tanto, cuando calculas la derivada en un punto el resultado es un número, mientras que cuando calculas la función derivada, el resultado es una fórmula de una función.

Por otra parte, la dificultad para comprender estos conceptos aumenta cuando la explicación del libro de texto no es todo lo clara que sería de esperar. Por ejemplo:

Texto 1[2]

[1] Para más detalles ver Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005)
[2] Para más detalles ver Inglada y Font (2003)

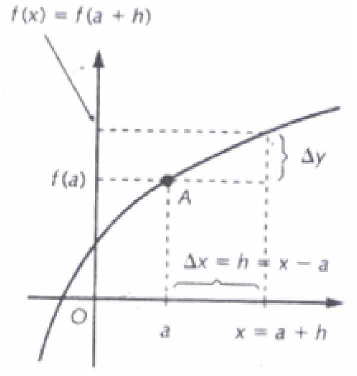


Fig. 7. $f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ en $x = a$.

Derivada de una función en un punto

La tasa de variación de una función $y=f(x)$ en un punto $x=a$, que se ha estudiado en el apartado anterior, se llama **derivada de la función** $y=f(x)$ **en el punto** $x=a$, y se representa por $f'(a)$ (fig. 7).

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}_{(en\ x=a)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Texto 2[3]

Definición de la función derivada

Si $y = f(x)$ es una función con variable independiente x, la derivada de y con respecto a x está definida por:

$$f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

En esta definición x permanece fijo, en tanto que Δx tiende a cero. Si el límite no existe para un valor particular x, la función no tiene derivada en ese valor.

Se acostumbra a denotar la derivada de la función $y = f(x)$, por: o o $f'(x)$ o y' o $D_x(y)$ o $D_x f(x)$ o . En nuestro texto usaremos: y' o $f'(x)$.

Cada manera diferente de introducir la función derivada en un proceso de enseñanza-aprendizaje conlleva una determinada complejidad semiótica. No presenta la misma complejidad semiótica dar la definición por límites que, por ejemplo, comenzar hallando una función derivada particular (p. e. la derivada de la función $f(x) = x^2$) a partir de los valores, dados en una tabla, de la derivada de la función en diversos puntos.

El interés por buscar alternativas a la definición de la función derivada por límites que presenten menos complejidad semiótica que ésta, lleva a la siguiente pregunta: *¿Cómo conseguir la emergencia de f´(x) a partir de f(x)?* La cual lleva a una pregunta un poco más concreta: *¿Cómo calcular f´(x) a partir de f(x)?*

2. UNA RESPUESTA TENIENDO EN CUENTA LAS REPRESENTACIONES ACTIVADAS

En Font (2000a), se considera que el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ se puede interpretar como un proceso, en la que a su vez se han de considerar tres subprocesos:

1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$

2) El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$.

3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$.

[3] Para más detalles ver Badillo (2003)

Font (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo Della derivata, in G. Arrigo (ed.) Atti del Convegno di didáctica Della matematica 2008 (13-24). Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza.

Para considerar los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos, en Font (2000a) se propone la tabla siguiente con el objetivo de considerar simultáneamente una función y su función derivada:

a de	Expresión simbólica $f'(x)$	Gráfica $f'(x)$	Tabla $f'(x)$	Descripción verbal de la situación (en términos de $f'(x)$)	Expresión simbólica $f(x)$	Gráfica $f(x)$	Tabla $f(x)$	Descripción verbal de la situación (en términos de $f(x)$)
Expresión simbólica $f(x)$								
Gráfica $f(x)$								
Tabla $f(x)$								
Descripción verbal de la situación (en términos de $f(x)$)								
Expresión simbólica $f'(x)$								
Gráfica $f'(x)$								
Tabla $f'(x)$								
Descripción verbal de la situación (en términos de $f'(x)$)								

Tabla 1. Representaciones activadas en el cálculo de $f'(x)$

En esta tabla tenemos, en las casillas con rayas verticales, las traducciones entre las diferentes formas de representar una función y, en las casillas con rayas horizontales, las traducciones entre las diferentes formas de representar la función derivada. Las casillas blancas nos conducen de una forma de representar la función a una forma de representar la función derivada, mientras que las grises nos permiten hallar la primitiva de una función a partir de la función derivada.

En la siguiente explicación de un libro de texto podemos observar conjuntamente los tres subprocesos, ya que primero se hace una traducción en la forma de presentar la función, después se obtiene la función derivada aplicando las reglas de derivación y, por último, se buscan distintas maneras de representar la función derivada. Es decir, se sigue el esquema siguiente:

Expresión analítica de $f(x)$ Y Expresión analítica de $f(x)$ $\Rightarrow$ Expresión analítica de $f'(x)$ Y Expresión analítica de $f'(x)$

Derivada de la función $f(x) = \log_a x$
Al estudiar la familia de las funciones logarítmicas, hemos constatado que todas son el resultado de una dilatación (contracción) en la función $f(x) = \ln x$. Es decir, que cualquier función logarítmica cumple $\log_a x = k \cdot \ln x$. Por consiguiente, la función derivada de la función $f(x) = \log_a x$ será:

Font (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo Della derivata, in G. Arrigo (ed.) Atti del Convegno di didáctica Della matematica 2008 (13-24). Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza.

$$f'(x) = k\cdot (\ln x)' = k\,\frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

Ahora bien, al estudiar el cambio de base, se observa que k es igual a $\log_a e$ o bien a $\dfrac{1}{\ln a}$.

Por lo tanto:

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} \quad \text{o bien} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

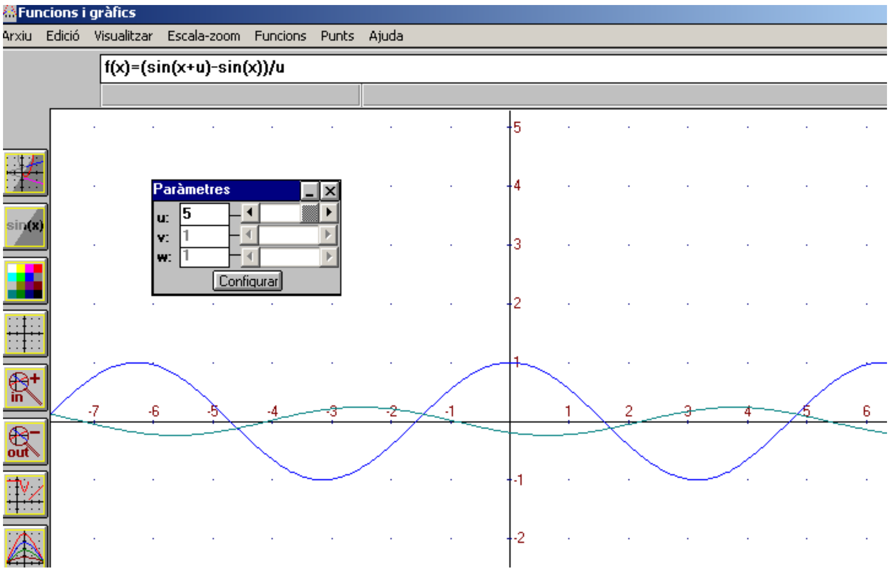
Ambas expresiones de la función derivada se emplean indistintamente

Entender el cálculo de la función derivada como un proceso en la que intervienen tres subprocesos, cada uno de los cuales puede utilizar representaciones diferentes, permite ampliar el abanico de técnicas de cálculo de la función derivada que no se restrinja al cálculo por límites o bien al uso de reglas de derivación (Font 2000a). Dichas técnicas pueden ser sugeridas, entre otras por (1) las posibilidades de los graficadores de funciones y (2) la historia de las matemáticas. En Font (2000b) se pueden hallar varias técnicas alternativas para cálculo de la derivada de la función seno.

3. EJEMPLO DE TÉCNICA ALTERNATIVA

La actividad que sigue está diseñada para alumnos de Bachillerato. Su objetivo es utilizar las posibilidades de los programas de representación de funciones para llegar a una conjetura sobre cuál es la derivada de la función seno obviando el cálculo de $\lim_{h\to 0}\dfrac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ debido a su dificultad.

Actividad: Con el graficador "Funcions i gràfics" representa la función $\dfrac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ y la función coseno. La pantalla tiene que quedar como la siguiente para el valor h = 5:



c) ¿Qué puedes decir de la función $\dfrac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$ cuando h se acerca a cero? ¿Qué puedes decir con relación al $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$? ¿Cuál es la derivada de la función seno?

En este caso, para calcular la derivada de la función seno se trataría de seguir el esquema siguiente:

Expresión simbólica de $f(x)$ ± Gráfica de $f´(x)$ Y Expresión simbólica de $f´(x)$

Una manera de obtener la gráfica de la función derivada a partir de la expresión simbólica de $f(x)$ consiste en utilizar un graficador para representar la función $p\,f_h(x)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (función gradiente o función pendiente de la función $f(x)$ según un incremento h) con h suficientemente pequeño. Al ser h muy pequeño, la gráfica que dibuja el graficador se puede considerar que es la de la función derivada. El alumno ha de reconocer que la gráfica que ha obtenido es la de la función coseno y recordar su fórmula. Este último paso supone que el alumno es capaz de reconocer la gráfica de la función coseno que tiene en la pantalla del ordenador.

El uso de esta técnica permite prescindir del siguiente cálculo de la derivada de la función seno y de la demostración previa de que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{seno\ h}{h}=1$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\cdot sen\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\lim_{h\to 0}\frac{sen\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2}) = \cos x$$

Además, tiene la ventaja de que permite reducir la unidad de trigonometría que se imparte antes de empezar la derivada, ya que no será necesario ampliarla para que incorpore las propiedades que permiten convertir la diferencia de senos en un producto.

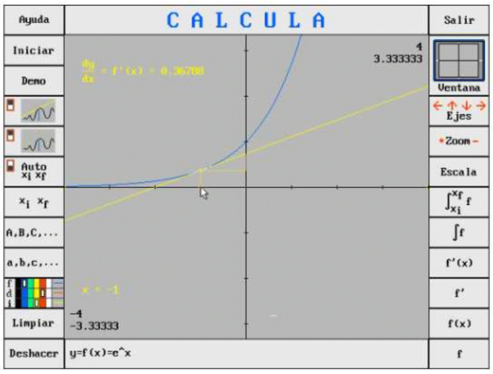
4. RECUPERACIÓN DE TÉCNICAS ANTIGUAS GRACIAS A LOS GRAFICADORES DINÁMICOS

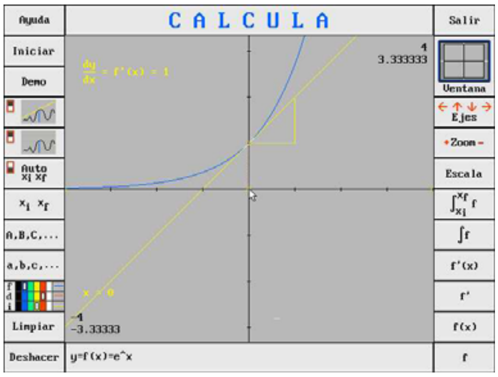
A continuación sigue un cuestionario propuesto a un grupo de estudiantes de primer curso de Bachillerato (17 años) como parte de un proceso de instrucción sobre la derivada (Font, 2005). Su objetivo es el cálculo de la derivada de la función exponencial $f(x) = e^x$ sin usar la definición por límites. Antes de contestar el cuestionario, los alumnos habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes. En concreto, les permitió observar que, para la función exponencial de base e, la longitud de la subtangente siempre es 1.

El software puede ser diverso, desde un programa clásico como el “Calcula”, o bien un programa gratuito de muy fácil manejo que permite representar funciones con parámetros como “Funcions i gràfics” o bien applets específicamente diseñados.

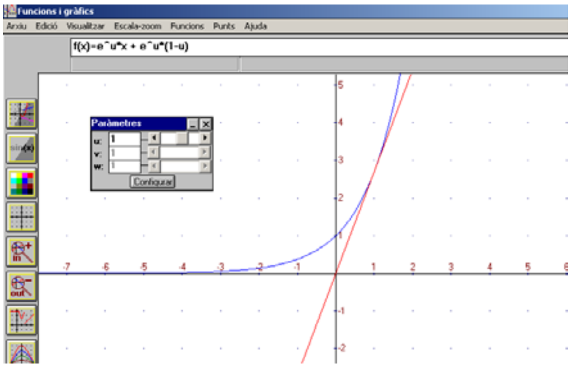
Font (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo Della derivata, in G. Arrigo (ed.) Atti del Convegno di didáctica Della matematica 2008 (13-24). Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza.

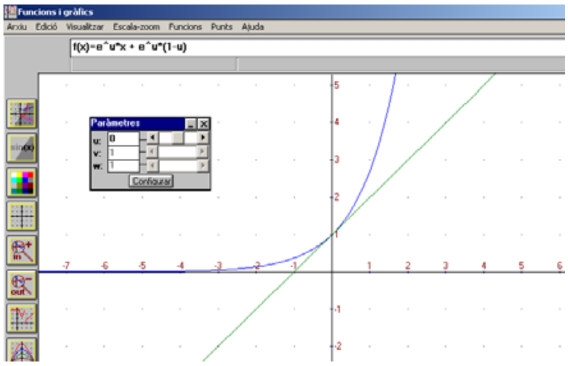
Programa Calcula



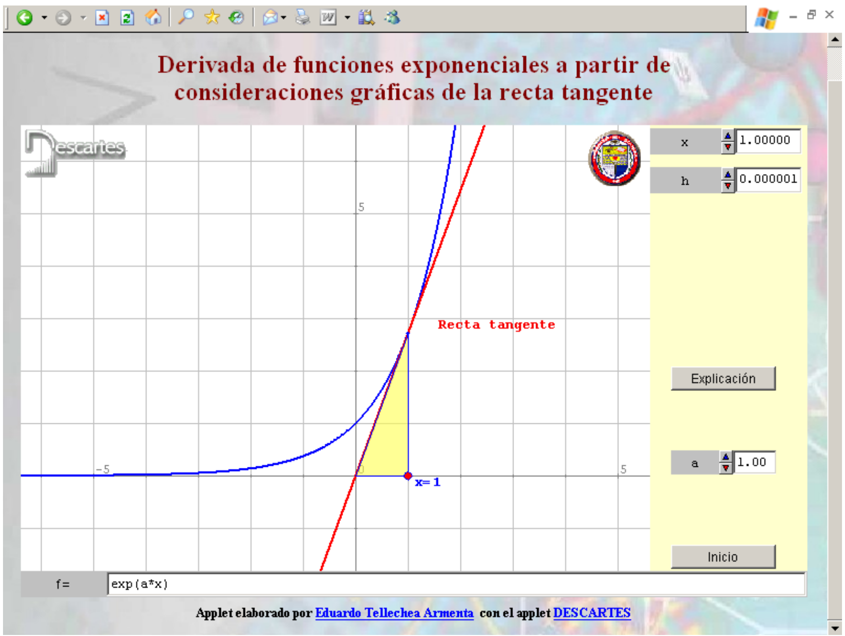


Programa "Funcions i gràfics"





Applets[4]

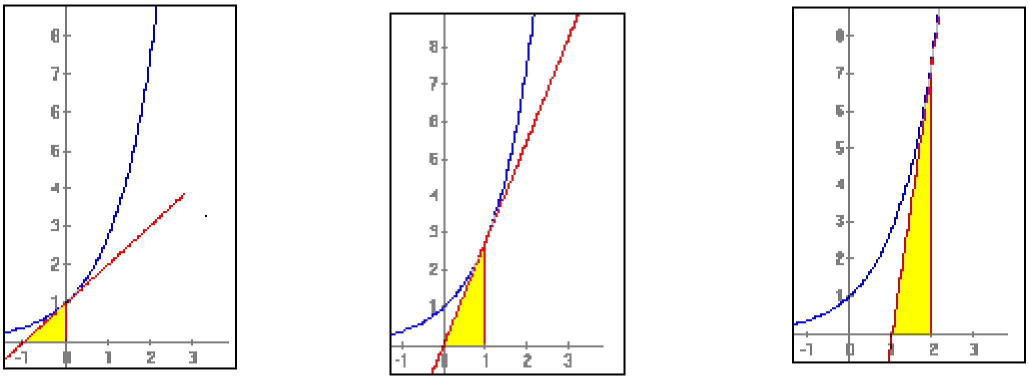


Cuestionario

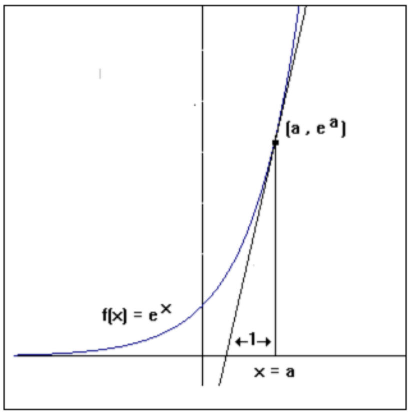
En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

a) Calcula $f\,'(0)$, $f\,'(1)$ y $f\,'(2)$

[4] Applet elaborado por Eduardo Tellechea Armenta con el applet DESCARTES. Recuperable en: http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo1/Descartes/ActividadesProyecto/deriexponenciales.htm



b) Calcula $f\,'(a)$



c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f\,'(x) = e^x$.

Para calcular la derivada de la función $f\,(x) = e^x$ los alumnos han de aplicar una serie de acciones (una técnica) que consiste en considerar, de entrada, un punto particular con la tangente dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, no se consideran variables). A continuación, a partir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, se halla primero una condición que cumplen todas las rectas tangentes (en este caso que la subtangente siempre es un segmento de longitud 1). Esta condición después se simboliza, aplicando la interpretación geométrica de la derivada, lo que permite calcular la derivada en $x = a$. Por último, los alumnos han de tener claro que la condición que han hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella se deriva, es válido para cualquier punto, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera. De esta manera se obtiene la expresión simbólica de la función derivada.

Esta técnica relaciona las siguientes representaciones:

Gráfica de $f\,(x)$ y Expresión simbólica de $f\,(x)$ $\Rightarrow$ Expresión simbólica de $f\,'(x)$

El punto de partida para hallar una condición que cumplen todas las tangentes es la gráfica de $f\,(x)$. La expresión simbólica de $f\,(x)$ es necesaria para simbolizar la condición que cumplen todas las pendientes de las rectas tangentes, la cual nos permite deducir la expresión simbólica de $f\,'(x)$. Esta técnica sólo es posible si se introduce la representación gráfica y la simbólica conjuntamente de la función exponencial de base *e* ya que si no se contempla la representación gráfica, la técnica no es viable. Contemplar la representación gráfica, además de la simbólica, permite realizar determinadas prácticas que con sólo la representación simbólica no serían posibles.

El cálculo de la derivada de la función exponencial de base *e* está a mitad de camino entre lo que se conoce históricamente como el problema de la tangente y su inverso —no es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya se tiene construida; ni es el problema inverso, ya que se conoce la expresión simbólica de la función—. Este método fue sugerido por los procedimientos utilizados para construir la tangente y la normal en el periodo que va de Descartes a Barrow.

Esta técnica tiene un campo de aplicación limitado, pero se puede aplicar, entre otras, a la familia de las funciones que tienen por gráfica una recta y a las funciones exponenciales y logarítmicas.

5. AMPLIACIÓN DEL ABANICO DE TÉCNICAS DE CÁLCULO DE $f\,'(x)$.

Los dos ejemplos de técnicas alternativas considerados anteriormente permiten ampliar el abanico de técnicas para calcular la función derivada. Además de las técnicas habituales (1 y 4) aparecen dos nuevas técnicas (2 y 3).

¿Cómo se calcula $f\,'(x)$?

- **Directamente**
  - **1) Utilizando límites**
    - **Calculando** $f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
  - **2) Gráficamente**
    - **2.1) Hallar una condición que cumplan todas las rectas tangentes**
    - **2.2) Hallar $f\,'(x)$ a partir de la condición anterior**
  - **3) Aproximadamente**
    - **3.1) Dibujar la gráfica de** $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **para un valor de h muy pequeño**
    - **3.2) Considerar que** $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \simeq \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f\,'(x)$
    - **3.3) Hallar la expresión de $f\,'(x)$ a partir de la gráfica de** $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$
- **Indirectamente**
  - **4) Utilizando las reglas de derivación**

Esquema 1

Puesto que cualquier recta tangente en un punto de la gráfica de la función $f(x) = e^x$ cumple que la subtangente vale 1, se puede aplicar el procedimiento 2 a la función logaritmo neperiano, lo cual permite prescindir, en la unidad de límites, del estudio previo de la indeterminación 1^∞, mientras que la aplicación del procedimiento 3 a la función seno permite prescindir, en la unidad de trigonometría, del estudio de las fórmulas trigonométricas que convierten una diferencia de senos en un producto. Por tanto, la incorporación de estas dos técnicas permite una organización de la unidad didáctica de derivadas que reduce considerablemente los contenidos de dos unidades (límites y trigonometría) que se han impartido previamente.

Font (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo Della derivata, in G. Arrigo (ed.) Atti del Convegno di didáctica Della matematica 2008 (13-24). Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza.

6. OTROS ASPECTOS A TENER EN CUENTA

Si bien es importante considerar las representaciones activadas en el cálculo de la función derivada hay que tener en cuenta otras factores que hacen el cuadro más complejo. Entre otros, la dualidad particular-general o las metáforas utilizadas en el discurso del profesor y en el de los alumnos.

Si observamos los tres apartados del cuestionario del apartado 4 (cálculo de la derivada de la función exponencial de base *e*) podemos intuir que en su redacción se ha tenido muy presente el paso de lo particular a lo general. En el apartado *a* se pide calcular la derivada para tres valores concretos (0, 1 y 2). En el apartado *b* se pide calcular la derivada para un valor concreto "*a*" y en el apartado *c* para un valor cualquiera. Es decir, el tránsito de lo particular a lo general ha estado muy presente en el diseño del cuestionario y las representaciones que intervienen son consideradas, según convenga, como particulares o generales. No basta sólo con considerar el tipo de representación que interviene en la técnica, es necesario reflexionar también sobre el rol que juega dicha representación con relación a la dualidad particular-general.

Por otra parte, los alumnos, antes de contestar el cuestionario, habían estado trabajando con la representación gráfica de la función $f(x) = e^x$ en un software dinámico que les permitió hallar una condición que cumplen todas las subtangentes (tienen una longitud igual a 1). Este software dinámico estructura implícitamente las gráficas funcionales en términos de la metáfora siguiente: "La gráfica de una función se puede considerar como la traza que deja un punto que se mueve sobre un camino (la gráfica)" (Font y Acevedo, 2003).

Si bien hay bastante acuerdo entre los investigadores en didáctica de las matemáticas sobre la importancia que tienen las representaciones o la dualidad particular-general, la importancia que tiene la metáfora en la comprensión de los alumnos sólo ha empezado a ser reconocida muy recientemente. La metáfora es más importante de lo que normalmente se cree para estructurar la comprensión de los alumnos, como se puede observar en el siguiente episodio descrito en Bolite, Acevedo y Font (2005):

> "A este alumno se le pidió que comentara verbalmente los pasos previos (dominio; cortes con los ejes; asíntotas y comportamiento en el infinito; estudio de máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y decrecimiento; estudio de puntos de inflexión e intervalos de concavidad y convexidad) y la construcción de la gráfica de su examen. Tanto la gráfica como los pasos previos de su respuesta en el examen eran correctos.
>
> Si bien en su respuesta escrita no se detectó ninguna metáfora, éstas fueron omnipresentes en su explicación verbal de cómo había construido la gráfica. Por ejemplo, a la pregunta ¿Puedes decirme cuándo la función será creciente y cuándo decreciente? el alumno había contestado correctamente señalando con el dedo los intervalos y diciendo aquí crece porque sube y aquí decrece porque baja)

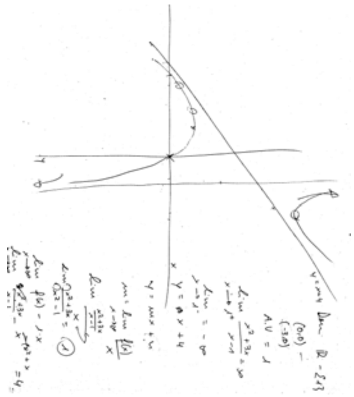
Entrevistador: ¿Puedes decirme ahora cuándo la función será creciente y cuándo decreciente? [(mientras pone el papel en el que el alumno ha dibujado la gráfica de la función en posición horizontal].

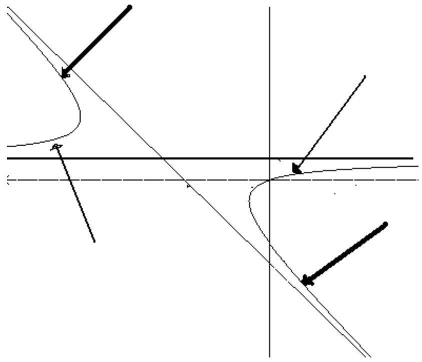
Alumno D: (Duda durante unos segundos) ¿No le entiendo, quiere decir que ha cambiado los *ejes?*

Entrevistador: No, no he cambiado los ejes, siguen siendo los mismos.

Alumno D: Esta es decreciente porque baja y esta es creciente porque sube, esta otra es decreciente porque baja y esta creciente porque sube. [Duda durante unos segundos y con el dedo señala la parte de la curva señalada con una flecha fina como creciente y la señalada con una flecha gruesa como decreciente]

Font (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo Della derivata, in G. Arrigo (ed.) Atti del Convegno di didáctica Della matematica 2008 (13-24). Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza.





7. CONSIDERACIÓN FINAL

La realización de la mayoría de prácticas matemáticas conlleva una complejidad semiótica importante y las representaciones utilizadas son determinantes, tanto para reducir o aumentar esta complejidad, como para la realización efectiva de la práctica. Por ejemplo, si en el cuestionario del apartado 4 se hubiera eliminado el apartado b, seguiríamos pretendiendo que el alumno aplicara la misma técnica de cálculo de la función derivada y continuaríamos utilizando gráficos (los de la actividad previa con el ordenador y los del apartado a) y expresiones simbólicas (apartado c), pero la complejidad semiótica que tendría que afrontar el alumno aumentaría notablemente y, con ello, las posibilidades efectivas de resolver la tarea.

Cuando en las prácticas matemáticas utilizamos una representación como un elemento genérico estamos actuando sobre un objeto particular, pero nos situamos en un "juego de lenguaje” en el que se entiende que nos interesan sus características generales y que prescindimos de los aspectos particulares. La asimilación (o no) de las reglas de este juego de lenguaje es fundamental para que los alumnos puedan convivir con la complejidad semiótica asociada a las prácticas en las que interviene representaciones que se consideran como elementos genéricos.

La incorporación de graficadotes en la enseñanza de las funciones y de las derivadas produce efectos metafóricos que condicionan la comprensión de los alumnos. Por ejemplo, la incorporación de graficadotes dinámicos puede llevar a muchos alumnos a estructurar la gráfica por medio de la proyección metafórica de su campo de experiencias sobre lo que es un “camino” (principio, final, punto que se mueve, antes, después, etc.).

REFERENCIAS

Badillo, E. (2003), *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas en ejercicio en Colombia*. Universitat Autònoma de Barcelona: Barcelona. [URL:http://www.tdx.cesca.es/TESIS_UAB/ VAILABLE/ TDX-0611104-144929/]

Bolite Frant, J., Acevedo, J. y Font, V. (2005). Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEM*, 46, 41-54.

Contreras A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25 (2): 151-186.

Font, V. (2000a), *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*, Tesis doctoral, Universitat de Barcelona. [URL: http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0408108-104902/]

Font (2008). Rappesentazioni attivate nel calcolo Della derivata, in G. Arrigo (ed.) Atti del Convegno di didáctica Della matematica 2008 (13-24). Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza.

Font, V. (2000b), Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno. *Uno*, 25, pp. 21-40.

Font, V. (2005), Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada en A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba.

Font, V. y Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, 21, 3, 405-418.

Inglada, N y Font, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental, *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Córdoba (Boletín nº 15), pp. 1-18. [URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/ siidm/boletin15.htm]