Representaciones matemáticas usadas en la resolución de un problema aritmético de reparto por niños del primer ciclo de primaria*

Edelmira Badillo
Mequè Edo
Universidad Autónoma de Barcelona

Vicenç Font
Universidad de Barcelona

Este estudio analiza las representaciones matemáticas usadas por alumnos de siete y ocho años al resolver individualmente un problema aritmético de reparto. El análisis de las representaciones se hizo en dos niveles, uno individual, usando herramientas del enfoque ontosemiótico, y uno global, construyendo un instrumento que relaciona el grado de corrección de la respuesta de los alumnos con los elementos comunes de las configuraciones. Los resultados revelan, entre otros aspectos, el uso de representaciones icónicas como herramienta de conteo y el uso generalizado de argumentos mostrativos.

Palabras clave: *problemas de reparto, aritmética, representaciones matemáticas, educación primaria.*

Mathematical representations used to solve an arithmetic distribution problem for first-cycle primary students

This paper analyses the mathematical representations used by pupils aged 7–8 to individually solve a distribution problem. The representations were analysed on two levels: an individual level, using tools from the onto-semiotic approach; and a global level, by building instruments linking the correctness of students' response to the common features of the settings. The findings results show, among other things, the use of iconic representations as a counting tool and widespread use of demonstrative arguments.

Keywords: *distribution problems, arithmetic, mathematical representations, primary education.*

Varias investigaciones han estudiado, desde diferentes perspectivas, los dibujos realizados por los alumnos en la clase de matemáticas (Saundry y Nicol, 2006; Smith, 2003; Woleck, 2001; Vicente, Orrantia y Verschaffel, 2008; Edo, Planas y Badillo, 2009). Smith (2003) y Woleck (2001) afirman que los dibujos cumplen básicamente dos funciones: por una parte, sirven para modelizar el problema y, por otra, son el soporte de la actividad matemática que les permite resolverlo. Woleck (2001) resalta la importancia de escuchar las explicaciones de los alumnos sobre sus dibujos para comprender la actividad matemática que realizan.

Partiendo de la doble naturaleza matemática y textual de la tarea de resolver un problema aritmético, Vicente, Orrantia y Verschaffel (2008) concluyen que los dibujos matemáticos incrementan el acierto en la resolución mientras que los dibujos situacionales[1] no ejercen ninguna influencia en la resolución de problemas aritméticos de dos operaciones por parte de alumnos de ocho-diez años.

Las investigaciones sobre las estrategias de repartición en las primeras edades han puesto de manifiesto que los alumnos necesitan realizar dibujos y estos son utilizados como soportes visuales y como herramientas de conteo

En nuestra investigación, el objetivo es estudiar el proceso de resolución de un problema de reparto en que el contexto obliga a que los elementos se separen en grupos. Esto conlleva a una repartición en la que el todo no es una unidad (o varias) que se debe dividir en partes, sino que el todo se ha de separar en conjuntos discretos de varios elementos, que además pueden tener (o no) diferente cardinal. Se trata de un tipo de problema de reparto similar a los investigados en Saundry y Nicol (2006) y Bosch, Castro y Segovia (2007) con niños de cuatro y cinco años, sobre los que hay pocas investigaciones.

Las investigaciones sobre las estrategias de repartición en las primeras edades han puesto de manifiesto que los alumnos necesitan realizar dibujos y estos son utilizados como soportes visuales y como herramientas de conteo (Fuson y Li, 2009). El papel que juegan estos dibujos en la resolución del problema y la actividad matemática asociada a dichas representaciones originan nuestra pregunta de investigación: ¿cuáles son los procedimientos de cálculo, las argumentaciones y los conceptos asociados a las representaciones que utilizan los alumnos de siete y ocho años cuando resuelven un problema aritmético de reparto en un contexto extramatemático de trabajo individual?

El artículo está organizado en seis secciones. Después de esta introducción en la próxima sección, se presentan las herramientas teóricas y metodológicas que se utilizan en el análisis, mientras que en la tercera sección se describe el diseño experimental del estudio. A continuación, en la cuarta sección, se presenta el análisis de los datos y en la quinta la discusión de los datos relativos a la pregunta de investigación. El documento concluye con las consideraciones finales.

Fundamentación teórica y metodológica

Para contestar a la pregunta de investigación, hemos utilizado algunos de los constructos teóricos propuestos por el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS). En algunos trabajos realizados en el marco del EOS (por ejemplo, Font, Godino y Gallardo, 2013) para analizar las producciones matemáticas de los alumnos, se analizan primero las prácticas matemáticas y después los objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas. En el caso que nos ocupa, las prácticas que realiza el alumno son la lectura del texto del problema aritmético presentado y la producción de un texto como respuesta.

Si consideramos los objetos matemáticos activados en la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación problema (por ejemplo, plantear y resolver un problema aritmético) vemos el uso de representaciones, verbales, icónica, simbólicas, etc. Estas representaciones son la parte ostensiva de una serie de conceptos-definiciones, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si la práctica realizada es satisfactoria. Así,

Cuando un alumno realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones problema, representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la configuración cuando un alumno realiza y evalúa una práctica matemática, activa un conglomerado formado por situaciones problema, representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, articulado en la configuración (Godino, Font y Gallardo, 2013).

Para pasar del análisis individual al global se ha utilizado un instrumento que relaciona los objetos matemáticos primarios y los argumentos que utilizan los alumnos durante el proceso de resolución (véase el cuadro 3, en la p. 66).

Diseño del estudio

El estudio se diseñó para ser realizado en cuatro fases. En las tres primeras, la muestra estuvo formada por 21 alumnos de segundo de primaria (siete-ocho años) de una escuela de Barcelona. En la primera fase, se diseñó una tarea matemática, para ser resuelta de manera individual y por escrito, con las siguientes características: problema aritmético de repartición, situación abierta y factible de ser resuelta con los conocimientos previos de los alumnos. El enunciado del problema es el siguiente: «Si tienes 18 ruedas, ¿cuántos juguetes con ruedas puedes tener?».

Esta tarea se presentó a los alumnos de la siguiente manera:

1 Primero se leyó en voz alta el enunciado y después los alumnos lo resolvieron, con papel y lápiz, durante una sesión de clase de una hora. Posteriormente, al acabar de resolver la tarea, se les hizo de manera individual la pregunta «¿qué has hecho?». Su respuesta fue grabada en audio y transcrita.

2 En la segunda fase, se estudiaron las representaciones producidas por los alumnos y se clasificaron de acuerdo con dos tipologías: la respuesta es el cardinal del conjunto de juguetes, o bien, la respuesta es solo el conjunto de juguetes (Badillo, Font, Edo y Planas, 2011). Después, para cada alumno se confeccionó su configuración cognitiva y, a continuación, se realizó el análisis conjunto.

3 En la tercera fase, después de analizar las respuestas escritas de los alumnos y realizar la configuración de objetos, se entrevistó a los alumnos para que explicaran el proceso de resolución y las representaciones que dibujaron. El objetivo de esta entrevista era contrastar y ampliar la información obtenida del análisis de las respuestas escritas. El investigador, en el momento de realizar la entrevista, presentaba a cada niño su respuesta por escrito del problema y le proporcionaba papel y lápiz por si necesitaba ampliar o mejorar su respuesta inicial. La entrevista fue semiestrucurada alrededor de si consideraban que esta era la única solución posible al problema y de si creían que podían solucionarlo de otras maneras. También se les animó a resolverlo de todas las formas que consideraran posibles. Estas entrevistas fueron realizadas por el investigador, una semana después a la resolución por escrito, se grabaron en audio y, posteriormente, fueron transcritas por el investigador. El tiempo de duración de cada entrevista varió dependiendo de cada alumno, oscilando entre cinco y veinte minutos. En total, estas entrevistas ocuparon dos días de la semana siguiente a la resolución por escrito.

4 En la cuarta fase se repitió el experimento, replicando las tres fases anteriores con una segunda clase integrada por 24 alumnos de otra escuela de Barcelona, con el objetivo de refinar las categorías que emergieron en el análisis de las respuestas dadas por el primer grupo de alumnos. Para poder determinar la influencia que tenía el hecho de pertenecer a un clase o a la otra en las representaciones de los alumnos, analizamos el tipo de

tareas habituales anteriores a la recogida de datos y entrevistamos a las profesoras de cada grupo, para conocer su opinión sobre el motivo por el cual los alumnos utilizaban un tipo de representación u otra.

Análisis de los datos

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, se realizaron dos tipos de análisis para cada una de las dos clases (grupos A y B). Primero, un análisis particular de cada uno de los casos y después, un análisis global de todas las producciones de los alumnos.

Análisis individual de la actividad matemática asociada a las representaciones

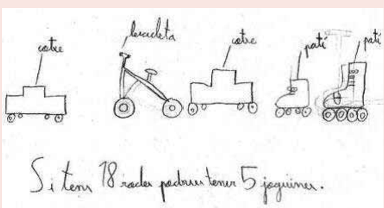
Para el primer tipo de análisis, se comenzó tomando como dato la producción escrita de cada alumno (cuadro 1) y se consideró que la lectura del texto del problema y su respuesta era la práctica matemática que había realizado. Posteriormente, para determinar parte de la actividad asociada a dicha práctica, se utilizó, como se hace en Malaspina y Font (2010), la herramienta configuración cognitiva de objetos matemáticos. Es decir, se analizaron los siguientes objetos primarios de la configuración: representaciones, conceptos-definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos. Para cada una de las respuestas de los niños de los dos grupos (43 alumnos en total), se construyó la configuración de objetos matemáticos. A modo de ejemplo, ilustramos y describimos la configuración de objetos de la alumna 12 del grupo A (cuadro 2).

Con relación a los conceptos, resaltamos que esta alumna es capaz de descomponer el conjunto de ruedas (18) en partes o subconjuntos (dibuja dos coches de 4 ruedas, una bicicleta de 2 ruedas y dos patines de cuatro ruedas). A continuación, es capaz de tratar cada uno de estos subconjuntos como un elemento (un juguete) de un nuevo conjunto (el conjunto de juguetes). Por último, distingue implícitamente entre conjunto y cardinal de un conjunto, ya que su respuesta se refiere al cardinal del conjunto de juguetes (cinco juguetes). Hay que resaltar que esta alumna aplica la propiedad matemática «un número se puede descomponer como suma de números más pequeños», para descomponer el 18 (en cinco sumandos diferentes): 4 + 2 + 4 + 4 + 4, hasta llegar a 18.

Con relación a los procedimientos, utiliza la propiedad anterior para descomponer el número 18. Consideramos que toma un primer número (dibuja un coche de cuatro ruedas), luego le suma otro número (dibuja una bicicleta de dos ruedas),

Producción escrita de la alumna 12A

Si tienes 18 ruedas, ¿cuántos juguetes con ruedas podrías tener?



Producción verbal de la alumna 12A

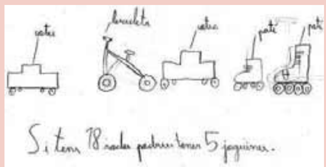
He dibujado juguetes. Un coche, una bicicleta, un coche, un patinete y otro patinete hasta llegar a 18 ruedas.

Cuadro 1. Datos de la alumna 12A

y como el resultado de la suma es inferior a 18, añade otro sumando (un coche de cuatro ruedas) y, dado que el resultado vuelve a ser inferior a 18, añade dos sumandos más (dos patines de cuatro ruedas). Por otra parte, determina de manera icónica el conjunto por extensión.

Finalmente, la tesis explícita de su argumento mostrativo (podría tener 5 juguetes) queda justificada por la presentación ostensiva del conjunto (representación icónica y descripción verbal). Dado que esta alumna en su argumento escrito, utiliza la expresión «podría tener…», consideramos que esta alumna sabía que el problema podía tener más de una solución. La entrevista realizada en la tercera fase nos permitió confirmar esta hipótesis y situar a la alumna en la red sistémica, en la categoría «intuye más de una respuesta al problema» (cuadro 3, en la página 66). A continuación transcribimos un fragmento de la entrevista sobre el proceso de resolución de la alumna 12A:

E: ¿Me podrías decir que hiciste primero? ¿Cómo comenzaste a resolver el problema?
M: Pensé en los juguetes que tenía en casa. Primero puse un coche, después pensé cuando salgo de casa a pasear por las mañanas e hice la bicicleta. Después hice otro coche y me acordé de que cuando voy al parque me pongo dos patines y los dibujé.
E: ¿Y por qué no dibujaste más cosas... más juguetes? ¿Cómo hacías para saber que ibas bien en el problema?

Situación problema	Si tienes 18 ruedas, ¿cuántos juguetes con ruedas podrías tener?
Representación	• Icónica con perspectiva. • Simbólica: - Verbal (un). - Nombres (18, 5). 
Conceptos	• Suma (conocimiento previo). • Términos de la suma implícitos (sumandos y resultados). • Número (conocimiento previo). • Conjunto. • Elementos de un conjunto.
Propiedades	• Un número se puede descomponer como una suma de números más pequeños.
Procedimientos	• Combinación de dos y cuatros para obtener 18 (ensayo y error). • Comparación de números. • Sumar. • Determinación de un conjunto por extensión.
Argumentos	• Tesis explícita: si tienes 18 ruedas podrías tener 5 juguetes. • Argumento gráfico: dibuja los 5 juguetes. • Argumento verbal: describe los elementos del conjunto (1 coche, 1 bicicleta, 1 coche, 1 patinete y otro patinete).

Cuadro 2. Configuración de objetos en la respuesta de la alumna 12A

M: Porque depende de las ruedas. Hice el coche y conté cuántas ruedas tenía y tenía cuatro. Y después hice una bicicleta y otro coche que pudiera sumar y otro juguete que pueda sumar, hasta llegar a dieciocho. Yo hice otro coche y un patín y otro patín y me salió dieciocho.

E: ¿Y qué ibas haciendo para saber que no te podías pasar o que no te faltaría?

M: Contando todas las ruedas y pensando en alguna cosa que pudiera tener ruedas, y para no pasarme de las ruedas…

E: ¿Cómo hacías?

M: Yo hice cuatro, después una bicicleta y sumé cuatro más dos y tenía seis. Y después dibujé otro coche y sumé seis mas cuatro y eran diez. Y después hice el patín y conté diez más cuatro y tenía catorce. Y después pinté el último patín en línea y eran dieciocho.

E: ¿Y después qué escribiste como respuesta?

M: Si tienes dieciocho ruedas podrías tener 5 juguetes.

E: ¿Y qué quieres decir con eso?

M: Que si tienes cinco juguetes. Depende de cuantas ruedas tengan porque si yo aquí pongo el patín… depende de cuantas ruedas tengan puedes tener dieciocho ruedas. Y depende de los juguetes que te gusten o te acuerdes… podrían ser otros juguetes…

E: ¿Y podrías tener más respuestas para este problema?

M: Podría tener más, claro que sí.

Análisis global de la actividad matemática asociada a las representaciones

El cuadro 3 (en la p. 66) muestra los resultados del análisis global de la respuesta de los alumnos de los grupos A y B.

El análisis de la práctica matemática de los alumnos lleva a dos grandes categorías. La primera gran categoría son los alumnos que ponen el énfasis en el cardinal del conjunto de juguetes. Aquí encontramos tres subcategorías:

1. Los que dan una única respuesta (por ejemplo, 10A responde: «si tuviera 18 ruedas tendría 6 juguetes con ruedas»)
2. Aquellos en los que en su respuesta se intuye más de una respuesta (por ejemplo, 12A escribe: «podría tener cinco juguetes»).
3. Los que dan más de una respuesta (por ejemplo, 18A, que da cuatro respuestas diferentes: «…puedes tener 9 motos, puedes tener 6 triciclos…»).

La segunda gran categoría son los alumnos que ponen el énfasis en el conjunto de juguetes y solo se refieren a él por extensión (por ejemplo, 21A responde: «he puesto un coche con cuatro ruedas, una moto con dos ruedas, un camión con dos ruedas y una limusina con ocho ruedas») o bien dan el cardinal de los subconjuntos de juguetes (6A dice: «cuatro coches y una bicicleta forman 18 ruedas»).

Para cada una de estas cinco subcategorías, organizamos los datos a partir de los objetos matemáticos de la configuración de objetos; a cada uno de estos objetos lo tratamos como aspecto dentro del cuadro 3. En esta ocasión, por limitaciones de espacio, hemos agrupado los procedimientos y las propiedades en un único aspecto y hemos dejado para otra ocasión el aspecto argumento. A su vez, dada la riqueza de las respuestas de los alumnos, para cada aspecto se han introducido matices que se han tratado como categorías; no entramos a detallarlas todas.

Discusión de los resultados

Todos los alumnos hacen una representación icónica del conjunto de juguetes, excepto 4 alumnos del grupo B. Una primera mirada centrada solo en las representaciones permite concluir que los alumnos del grupo B o bien no utilizan dibujos, o bien utilizan dibujos más abstractos que los del grupo A. Ahora bien, lo que nos parece importante resaltar es que, en este caso, la falta de dibujo o el grado de abstracción del dibujo no es el aspecto más relevante para entender la actividad matemática realizada por el alumno. Dicho de otra manera, consideramos que lo que es relevante para comprender y valorar la actividad matemática realizada por el alumno es la consideración global de la configuración cognitiva activada en su respuesta. Por ejemplo, tenemos el caso de los alumnos 12A y 3B, los cuales han activado la misma configuración cognitiva, salvo en el caso de la representación. El alumno 12A dibuja cuatro juguetes de cuatro ruedas y uno de dos ruedas, mientras que el alumno 3B dibuja cuatro conjuntos de cuatro ruedas y uno de dos ruedas. Si nos fijamos solo en el dibujo, podemos llegar a la conclusión de que la actividad matemática es muy diferente en cada caso, pero si miramos la configuración cognitiva globalmente, la diferencia ya no es tan significativa.

Otro ejemplo para justificar que la unidad de análisis de la actividad matemática debe ser la configuración cognitiva, y no uno solo de sus elementos, lo tenemos en el caso de los conceptos. Si nos fijamos en los alumnos que utilizan la multiplicación, estos no necesariamente llegan a dar la respuesta correcta o la más general posible, por ejemplo el alumno 19A, que sí dan alumnos que utilizan la suma (un concepto que se puede considerar menos abstracto que el de la multiplicación) por ejemplo, la alumna 12A y el alumno 3B.

Para poder hablar de un alumno con un nivel de abstracción superior a otro, se debería tener en cuenta la configuración cognitiva globalmente. Por ejemplo, podemos decir que la respuesta del alumno 2B es más abstracta que la de otros porque no necesita hacer dibujos icónicos, utiliza directamente la multiplicación, el hecho de utilizar la multiplicación no le lleva a dar la respuesta concretando el tipo de juguetes (motos), y su argumento no consiste en mostrar la colección de juguetes mediante un dibujo, sino que primero hace un proceso de contextualización verbal (9 motos con 2 ruedas) y, a continuación, un proceso de descontextualización (9 juguetes con ruedas).

> Para poder hablar de un alumno con un nivel de abstracción superior a otro, se debería tenerse en cuenta la configuración cognitiva globalmente

Hay cuatro alumnos (3A, 17A, 19A, 7B) que separan el conjunto de las 18 ruedas en conjuntos discretos de igual cardinal y comienzan la resolución del problema usando representaciones escritas simbólico-numéricas (descomponen el 18 en suma de sumandos iguales) y, en los tres casos, traducen esta representación a otra expresión escrita simbólica en la que usan el concepto de multiplicación.

Por otra parte, el alumno 18A usa la multiplicación en sus cuatro respuestas diferentes (dadas en forma verbal e icónica). Ahora bien, no usa representaciones simbólicas numéricas escritas, por lo que suponemos que, para dar su respuesta, ha efectuado cálculos mentalmente. De sus respuestas verbales inferimos que hace un uso implícito de la propiedad conmutativa («puedes tener 6 triciclos con 3 ruedas o puedes tener 3 limusinas con 6 ruedas y también te sale 18») y que, a diferencia de los tres alumnos anteriores, no necesita descomponer explícitamente el 18 en sumandos iguales para llegar a descomponer el 18 en producto de dos factores. En resumen, no necesita pasar por la suma para llegar a la multiplicación.

Tipos de respuesta / Objetos matemáticos primarios				Representaciones				
				Verbal	Simbólica/ numérica	Icónica		
						Perspectiva	Plana	Plana-simbólica
Argumentos	Es el cardinal del conjunto de juguetes	Única respuesta		3A, 4A, 10A, 2B, 3B, 4B, 5B, 6B, 7B, 8B, 9B, 10B, 12B, 14B, 15B, 18B 20B	3A, 2B, 3B, 4B 7B, 8B, 11B, 12B, 15B	4A, 10A, 5B, 10B, 14B, 15B	3A, 8B	11B, 12B
		Se intuye más de una respuesta		12A, 15A, 17A, 16B	17A, 16B	12A, 15A, 17A		
		Más de una respuesta		18A			18A	
	Sólo es el conjunto de juguetes	Única respuesta	Da el conjunto de juguetes por extensión	9A, 16A, 19A, 21A, 21B, 22B	19A	16A, 1B, 17B	2A, 7A, 9A, 19A, 21A, 13B, 21B	8A
			Da el cardinal de los subconjuntos de juguetes	1A, 5A, 6A, 11A, 13A, 14A, 20A		1A, 5A	6A, 13A, 14A	11A, 20A
		Se intuye más de una respuesta	Da el conjunto de juguetes por extensión	19B	19B	19B		
			Da el cardinal de los subcon-juntos de juguetes					
		Más de una respuesta						

Cuadro 3. Análisis global de las respuestas de los alumnos de los Grupos A y B

⇨

Representaciones		Procedimientos y propiedades			Conceptos	
Diagrama		Descomposición en producto de 2 factores	Descomposición en sumandos iguales	Descomposición en sumandos diferentes	Con multiplicación	Sin multiplicación
Venn	Árbol					
3B, 4B, 5B, 6B, 20B	4B, 8B	2B, 11B	3A, 5B, 7B, 9B, 20B	4A, 10A, 3B, 4B, 6B, 8B, 10B, 12B, 14B, 15B, 18B	3A, 2B, 7B, 11B	4A, 10A, 3B, 4B, 5B, 6B, 8B, 9B, 10B, 12B, 14B, 15B, 18B, 20B
			17A, 16B	12A, 15A, 16B	17A	12A, 15A, 16B
			18A	18A	18A	
22B			7A, 9A, 19A	2A, 8A, 16A, 21A, 1B, 13B, 17B, 21B, 22B	19A	2A, 7A, 8A, 9A, 16A, 21A, 1B, 13B, 17B, 21B, 22B
				1A, 5A, 6A, 11A, 13A, 14A, 20A	11A	1A, 5A, 6A, 13A, 14A, 20A
			19B	19B		19B

Todos los alumnos, menos el 2B, utilizan implícita o explícitamente la propiedad de descomponer el 18 en sumandos (incluimos el caso extremo del alumno 18A que descompone el número 18 en 4 x 4 + 2). Cuando los sumandos son iguales, por una parte se facilita el uso del concepto de multiplicación y, por otra, se facilita dar el cardinal de un conjunto de juguetes de un determinado tipo (por ejemplo, la respuesta del alumno 17A, seis triciclos), lo cual implica que no se use el término «juguete», que es más abstracto. En cambio, los alumnos que usan dicho término explícitamente en su respuesta (como el 16B, «podría tener 5 juguetes con ruedas»), hacen una descomposición del número 18 en sumandos diferentes.

En este caso tenemos un ejemplo de la estrecha relación entre propiedades y conceptos. El uso de una determinada propiedad matemática (un determinado tipo de descomposición del número 18) condiciona el uso, por parte de los alumnos, de determinados conceptos matemáticos (por ejemplo, suma o multiplicación). Por otra parte, el hecho de usar la multiplicación –un concepto que, en términos curriculares, se considera más difícil y abstracto que la suma– conlleva, en este caso, menor abstracción en la respuesta del problema.

> El uso de una determinada propiedad matemática (un determinado tipo de descomposición del número 18) condiciona el uso, por parte de los alumnos, de determinados conceptos matemáticos (por ejemplo, suma o multiplicación)

Podemos observar fundamentalmente dos procedimientos. Uno está relacionado con la aplicación de la propiedad matemática que asegura la descomposición del número 18 en sumandos. Los alumnos aplican sumas y restas, e incluso multiplicaciones, mentalmente, para llegar a dicha descomposición. El otro es la determinación por extensión del conjunto (mediante una representación icónica). Este último, utilizado por casi todos los alumnos, es el que les permite argumentar, explícita o implícitamente, su respuesta. Se trata de argumentos mostrativos que consisten en la presentación ostensiva del conjunto (los dibujos de los juguetes).

Consideraciones finales

Para terminar, queremos hacer dos consideraciones metodológicas. Consideramos que las categorías teóricas que nos proporciona el EOS nos han permitido hacer un análisis en profundidad de las producciones de los alumnos, dando cuenta de la complejidad de objetos (representaciones, conceptos, propiedades, etc.), activados en el proceso de resolución de problemas aritméticos.

El cuadro 3 ha sido un instrumento potente de organización que ha permitido construir una taxonomía de las respuestas de los alumnos cuando resuelven un problema en el que el todo se ha de separar en conjuntos discretos de varios elementos, que además pueden tener (o no) diferente cardinal.

Nota

* Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31464 y EDU2012-3264.

1. El dibujo matemático resalta la estructura matemática subyacente en el enunciado. Por ejemplo, en un problema aritmético de cambio, mostraría la estructura parte-todo. El dibujo situacional da información relevante sobre la situación. Por ejemplo, poner viñetas

que describen cada uno de los momentos de la situación planteada por el enunciado, para que se mantenga la coherencia sintáctica entre el enunciado del problema y las imágenes. Estas dos tipologías de dibujos son diferentes a otros que no contribuyen a la comprensión matemática o situacional del problema.

Referencias bibliográficas

BADILLO, E.; FONT, V.; EDO, M.; PLANAS, N. (2011): «Analysis of mathematical solutions of seven year old pupils when solving an arithmetic problem on distribution», en PYTLAK, M.; SWOBODA, E.; ROWLAND, T. (eds.): *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Rzeszów (Polonia), pp. 1832-1841.

BOSCH, M.A.; CASTRO, E.; SEGOVIA, I. (2007): «El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles: una investigación en curso». *PNA,* vol. 1(4), pp. 179-190.

EDO, M.; PLANAS, N.; BADILLO, E. (2009): «Mathematical learning in a context of play». *European Early Childhood Education Research Journal,* vol. 17(3), pp. 325-341.

FONT, V.; GODINO, J.D.; GALLARDO, J. (2013): «The emergence of objects from mathematical practices». *Educational Studies in Mathematics, núm*. 82, pp. 97-124.

FUSON, K.; LI, Y. (2009): «Cross-cultural issues in linguistic, visual-quantitative, and written-numeric support for mathematical thinking». *ZDM-The International Journal on Mathematics Education,* vol. 41(6), pp. 793-808.

MALASPINA, U.; FONT, V. (2010): «The role of intuition in the solving of optimization problems». *Educational Studies in Mathematics,* vol. 75(1), pp. 107-130.

SAUNDRY, C.; NICOL, C.; (2006): «Drawing as problem-solving: Young children's mathematical reasoning through pictures», en NOVOTNÁ, J.; MORAOVÁ, H.; KRÁTKÁ, M.; STEHLÍKOVÁ, N. (eds.): *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 5. Praga. PME, pp. 57-63.

SMITH, S.P. (2003): «Representation in school mathematics: Children's representations of problems», en KILPATRICK, J.; MARTIN, W.G.; SCHIFTER, D. (eds.): *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, NCTM, pp. 263-274.

VICENTE, S.; ORRANTIA, J.; VERSCHAFFEL, L. (2008): «Influence of situational and mathematical information on situationally difficult Word problems». *Studia Psychologica,* vol. 50(4), pp. 337-356.

WARFIELD, J. (2001): «Teaching kindergarten to solve word problems». *Early Childhood Educational Journal*, vol. 28(3), pp. 127-138.

WOLECK, K. R. (2001): «Listen to their pictures: An investigation of children's mathematical drawings», en COUCO, A. (ed.): *The roles of representation in school mathematics.* Reston, VA. NCTM, pp. 215-227.

Referencias de los autores

Edelmira Badillo

Mequè Edo

Universidad Autónoma de Barcelona.

edelmira.badillo@uab.cat

meque.edo@uab.cat

Vicenç Font

Universidad de Barcelona

vfont@ub.edu

Este artículo fue recibido en Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas en julio de 2013 y aceptado en octubre de 2013 para su publicación.