

OBJETOS PERSONALES MATEMÁTICOS Y DIDÁCTICOS DEL PROFESORADO Y CAMBIO INSTITUCIONAL. EL CASO DE LA CONTEXTUALIZACIÓN DE FUNCIONES EN UNA FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES¹

Ana Beatriz Ramos, Universidad de Carabobo

Vicenç Font, Universitat de Barcelona

RESUMEN

En este trabajo presentamos la primera fase de una investigación que estamos realizando sobre el papel que juegan los objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado en la modificación del significado pretendido para un objeto matemático en una institución escolar, la cual tiene autonomía para modificar dicho significado. Esta investigación consiste en un estudio de caso, en concreto nos interesamos por el papel que juegan los objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado en la incorporación de situaciones contextualizadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones en la asignatura “Introducción a la Matemática” impartida en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo. Venezuela.

MARCO TEÓRICO

1 Teoría de las Funciones Semióticas

La investigación que se comenta se enmarca en la teoría de las Funciones Semióticas (TFS a partir de ahora). En diferentes trabajos Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino 2002) han desarrollado un conjunto de nociones teóricas que configuran *un enfoque ontológico-semiótico* de la cognición matemática.

1. Los objetos personales

La relación que hay entre las prácticas y los problemas que las suscitan da lugar a objetos matemáticos personales que, según Godino y Batanero (1994, p. 335), son: “*emergentes del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas*”. Estos objetos personales van cobrando forma —van emergiendo— en un aprendizaje suscitado por la propia práctica.

Es conveniente efectuar algunas matizaciones sobre el objeto personal. En primer lugar, un objeto personal es algo de lo que se tiene conciencia subjetiva. El hecho de que los individuos pueden hablar sobre sus objetos personales o, dicho de otra manera, pueden realizar prácticas discursivas sobre los mismos, conduce a una vía de investigación en Didáctica de las Matemáticas de gran relevancia. Por otra parte, un objeto personal implica la generación, por medio de la intersubjetividad que facilita la clase de Matemáticas, de una regla de comportamiento en el sujeto. Es esta última dimensión, que se conoce con la denominación de máxima pragmática, la que se toma en consideración en Godino y Batanero (1994, p. 341) para definir el significado de un

¹ Versión reducida de un artículo de igual título aceptado para su publicación en *Revista de Educación*

objeto personal O_p : *"Es el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado."*

Asimismo conviene observar que, dado que el significado de un objeto personal consiste en las prácticas que hace la persona y también en aquellas que haría o planificaría en otras situaciones en las que tuviera que resolver problemas similares, dicho objeto personal se convierte en una posibilidad permanente de planificación de prácticas. Es obvio, además, que el significado de un objeto personal queda ligado a otros objetos personales y significados, puesto que, en general, en las prácticas intervienen conjuntamente diversos objetos personales.

Esta forma de entender el significado postula unas entidades mentales, los objetos personales, que no nos alejan de las prácticas que se observan en la interacción que se produce en el aula. Es decir, unas entidades mentales que permiten centrar el interés en las descripciones y las representaciones a medida que se construyen a lo largo de una interacción en el marco de una institución escolar.

2. *Objetos institucionales*

Una característica que presentan los significados y los objetos personales es que son fenómenos individuales, pero al estar inmerso el sujeto en instituciones donde necesariamente se dan interacciones, tiene también un carácter colectivo, por tanto cualquier análisis que los abordara desde uno solo de estos aspectos resultaría reduccionista. Por este motivo en Godino y Batanero 1994 se introducen las instituciones, los objetos institucionales y los significados institucionales.

Para Godino y Batanero una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen.

Con relación al objeto institucional interesa resaltar los siguientes aspectos: (1) Las personas distinguen entre sus objetos personales y los objetos institucionales. Cuando hablan de sus objetos personales utilizan el discurso en primera persona, mientras que cuando hablan de los objetos institucionales utilizan el discurso en tercera persona. (2) Un objeto institucional implica la generación de una regla de comportamiento compartida por toda la institución. En Godino y Batanero (1994, p. 340) también se recurre a la máxima pragmática para definir el significado de un objeto institucional O_I : *"Es el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado"*.

Para la TFS, la dialéctica personal-institucional se convierte en una cuestión central y el alumno pasa de ser un alumno individual a ser un alumno-en-una-institución, lo que, obliga a distinguir entre objetos personales y objetos institucionales y a problematizar estas dos clases de objetos y la relación entre ellos. El constructivismo psicológico, y en general todas las investigaciones realizadas en el campo de la Didáctica de las Matemáticas desde el enfoque cognitivo, se han centrado en los objetos personales. En el otro extremo tenemos la antropología cognitiva en la que prima el aspecto institucional. Entre estos dos extremos aparecen diferentes teorías que intentan explicar la dialéctica personal-institucional sin olvidar ninguno de los dos polos. Es en este contexto donde se sitúa la teoría TFS.

3 *Tipos de significados institucionales y personales*

Para explicar la dialéctica institucional-personal, en el análisis de los significados institucionales de un objeto matemático interesa, por operatividad, distinguir cuatro tipos, que designamos como significado de referencia, pretendido, implementado y evaluado.

Cuando un profesor planifica un proceso de instrucción sobre un objeto matemático para un grupo de estudiantes, comienza por delimitar "lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas". Acudirá, por tanto, a los textos matemáticos correspondientes, a las orientaciones curriculares, y en general a lo que "los expertos" consideran que son las prácticas operativas y discursivas inherentes al objeto, que se fija como objetivo instruccional. Asimismo, el profesor usará sus conocimientos personales previamente adquiridos. Con todo ello, construirá un sistema de prácticas que designamos como *significado institucional de referencia* del objeto (contenido o tema matemático).

Es importante remarcar que el "significado de referencia" es un constructo que resulta difícil de delimitar ya que en cierta manera está implícito en todo el proceso —en términos metafóricos se puede decir que el significado de referencia juega el mismo papel que "el conjunto universal" en la teoría de conjuntos—. Este significado de referencia es la resultante de diferentes componentes: el significado del objeto en la institución matemática universitaria, la historia de dicho objeto, las orientaciones curriculares, los diferentes libros de texto y materiales que la institución escolar suele utilizar, los objetos matemáticos personales de los profesores que forman la institución, los objetos didácticos personales de los profesores que forman la institución, etc. Todos estos elementos forman un trasfondo a partir del cual el profesor, de acuerdo con el departamento de matemáticas de la institución escolar, elabora el significado pretendido. Algunos de estos componentes resultan fáciles de delimitar -por ejemplo, las orientaciones curriculares- pero otros están presentes de manera muy difusa.

A partir del significado de referencia, el profesor selecciona, ordena, y delimita la parte específica que va a proponer a sus estudiantes durante un proceso de estudio determinado. Tendrá para ello en cuenta el tiempo disponible, los significados previos de los estudiantes y los medios instruccionales disponibles. Denominaremos como *significado institucional pretendido* al sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional.

Teniendo en cuenta que lo que se planifica no exactamente se pone en práctica —puesto que las interacciones profesor-alumnos y alumnos-alumnos hacen que se introduzcan nuevos ejemplos, se obvian otros, se aborden nuevas cuestiones...— y con el fin de introducir como objeto de investigación estos procesos de cambio en los significados institucionales, interesa hablar del *significado implementado*, como el sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes.

Un cuarto tipo de significado institucional se pone en juego en los procesos de evaluación. El profesor selecciona una colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes. Serán una muestra (se espera que representativa) del significado implementado. Lo designamos como *significado institucional evaluado*.

Estos dos últimos tipos de significados institucionales son fáciles de determinar si se tiene una descripción detallada de las clases impartidas. Pero los dos primeros tipos de

significado institucional resultan menos nítidos. El significado pretendido resulta difícil de concretar básicamente porque los profesores no suelen dejar mucha constancia de su trabajo de planificación -por ejemplo, la lectura de las actas de los departamentos de los centros escolares resulta una fuente insuficiente para delimitar el proceso que va del significado de referencia al significado pretendido-. En muchos casos, se limitan a seleccionar un libro de texto (o un material) a partir del cual van haciendo modificaciones sobre la marcha para conseguir el significado implementado. Por tanto, en un proceso de estudio "normal" el libro de texto suele ser el significado pretendido.

Desde el punto de vista del estudiante, y en un momento dado, cabe hacer la distinción entre el significado personal global, el declarado y el logrado. El *significado global* corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno, relativas a un objeto matemático (contenido o tema); el *declarado* da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional; finalmente, el *significado personal logrado* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. La parte del significado declarado no concordante con el institucional es lo que habitualmente se consideran como errores de aprendizaje. Es importante remarcar que en el significado global pueden influir otras materias además de las matemáticas.

De acuerdo con este punto de vista el significado de los objetos personales matemáticos y didácticos de los profesores consiste en un conjunto de prácticas discursivas y operativas, algunas de las cuales tratan de cómo debería ser el proceso de instrucción -componentes del significado de referencia- y otras son las que intervienen en la determinación del significado pretendido, el implementado y el evaluado. En algunos casos el profesor puede no estar de acuerdo con otras componentes del significado de referencia como, por ejemplo, el currículum oficial de la institución, pero, a pesar de ello, el significado que él pretende, implementa o evalúa puede ser muy parecido al de otro profesor cuya opinión si esté más de acorde con dicho currículum

2 Concepciones, creencias y conocimiento del profesor

El marco teórico adoptado (TFS) es uno de los posibles marcos que se pueden utilizar para investigar las prácticas discursivas y operativas de los profesores. Puesto que son muchas las aproximaciones teóricas que se han interesado por el pensamiento y la práctica del profesor, nos referiremos a ellas como investigaciones sobre "creencias, concepciones y conocimiento del profesor" y en esta investigación se han tenido en cuenta como un marco de referencia más general que el de la TFS.

Si bien son numerosas dichas aproximaciones teóricas, hay básicamente dos maneras de enfocar la investigación sobre creencias, concepciones y conocimiento del profesor. Marcelo (2002) distingue entre las investigaciones sobre el *pensamiento del profesor* y las que se interesan por el *conocimiento del profesor*. La investigación sobre el pensamiento del profesor, mayoritaria en los años 80, se realizó fundamentalmente bajo un enfoque cognitivo. En la última década este tipo de investigación dio paso a una preocupación por el conocimiento del profesor, ya que se tomó conciencia de que los profesores generan conocimiento sobre la enseñanza a partir de su práctica que conviene ser investigado. Este último enfoque teórico también ha sido tomado como referencia para nuestra investigación.

Con relación a la distinción entre creencias y concepciones en las diferentes investigaciones hay dos maneras de enfocarla. Una consiste en considerar las creencias como un conocimiento más básico que no se cuestiona, que se asume sin ser problematizado mientras que las concepciones serían un conocimiento más elaborado, más racional y más proposicional —por ejemplo en Martínez (2003) —. La otra consiste en diferenciar las concepciones y las creencias por la temática. Las concepciones tendrían que ver con las matemáticas y las creencias con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas —por ejemplo en Moreno y Azcárate (2003) —. Además hay una tercera clasificación que consiste en diferenciar la temática según que ésta sea particular o general. Estas tres clasificaciones se pueden considerar conjuntamente, es decir se pueden tener creencias o concepciones sobre las matemáticas en general o , por ejemplo, sobre la resta en particular y también se pueden tener creencias y concepciones sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en general o se pueden tener sobre la enseñanza y el aprendizaje de la resta en particular.

3 Adaptación de la institución a cambios e innovaciones

La manera eficaz de introducir innovaciones en una institución es un tema sobre el que hay importantes desacuerdos, los cuales están relacionados con la manera de entender la relación que se establece entre las instituciones y las personas en las que se encarna dicha institución. Fundamentalmente hay tres puntos de vista que en la sociología se suelen calificar como: 1) punto de vista sistémico, 2) punto de vista de los sujetos y 3) el punto de vista de los sistemas y los sujetos (dual). El primero pone en primer plano la institución y considera que ésta determina la práctica de los profesores, la segunda dirige su atención primero a los sujetos y deja en segundo plano a la institución. La tercera hace hincapié en ambos aspectos: instituciones y personas.

En esta investigación nos hemos posicionado en este punto de vista dual y hemos atendido tanto a aspectos institucionales como a los argumentos de los sujetos que forman la institución. Al posicionarnos en la perspectiva dual hemos tenido en cuenta las aportaciones de la filosofía dialógica en general y en particular los constructos propuestos en Valero (1999) para la educación matemática (deliberación, colexión y transformación).

4 El objeto función

De la investigación didáctica reciente sobre el concepto de función hay que destacar dos tipos de investigaciones: 1) Las que se han ocupado de analizar el papel que juegan las diferentes clases de representación del concepto de función (Janvier 1987) y 2) Las que han analizado la noción de función como proceso y como objeto (Sfard 1992).

En esta investigación hemos considerado importante que el profesorado de la institución escolar investigada tuviera conocimiento de estos resultados y valorara conjuntamente la incorporación en el proceso de instrucción de estos dos aspectos y muy en especial la presentación de diferentes formas de representar las funciones.

5 Contextualización y modelización.

Con relación al término contexto, hay básicamente dos usos. Uno consiste en considerar el contexto como un ejemplo particular de un objeto matemático, el otro consiste en dar más detalles sobre el caso particular -enmarcarlo en el entorno-. Siendo estos dos usos importantes, consideramos que de los dos el más importante es el primero ya que la

relación entre el ejemplar y el tipo —entre lo concreto y lo abstracto o entre lo extensivo y lo intensivo— es básica para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Con relación a las situaciones que contextualizan un objeto matemático se han propuesto diferentes clasificaciones. En esta investigación hemos utilizado la clasificación propuesta en Martínez (2003). Este autor distingue los siguientes tipos de contextos: a) Contexto Real: refiere a la práctica real de la matemáticas, al entorno sociocultural donde esta práctica tiene lugar. b) Contexto simulado: tiene su origen o fuente en el contexto real, es una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características. c) Contexto evocado: refiere a las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, y que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho.

El significado de un objeto matemático entendido como sistema de prácticas se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación produciendo un determinado sentido. Cada contexto ayuda a producir sentido (permite generar un subconjunto de prácticas), pero no produce todos los sentidos.

Desde esta perspectiva un criterio de idoneidad de una trayectoria didáctica para un objeto matemático es que el conjunto de prácticas implementadas sea un conjunto lo más representativo del sistema de prácticas que son el significado del objeto. Dicho en términos de contextos, hay que presentar a los alumnos una muestra de contextos representativa, una muestra de contextos que permita construir una muestra representativa de los diferentes sentidos del objeto.

Un término muy relacionado con la contextualización y la descontextualización es el de modelización. En este trabajo consideraremos que este proceso sigue las cinco fases siguientes: 1) Observación de la realidad. 2) Descripción simplificada de la realidad. 3) Construcción de un modelo. 4) Trabajo matemático con el modelo. 5) Interpretación de resultados en la realidad.

La modelización es un proceso complejo que implica primero partir de la situación concreta para, gracias a un proceso descontextualizador, obtener un objeto matemático y después, gracias a un proceso de contextualización, aplicar este objeto a diferentes situaciones reales. En esta investigación se ha utilizado el término “matemáticas contextualizadas” cuando se pretende que el alumno realice alguno –o ambos- de estos procesos. Hemos utilizado el término “descontextualización” para referirnos al proceso que va de la realidad al objeto matemático, “contextualización” para indicar el proceso que va del objeto matemático a la realidad y “modelización” cuando se presenta a los alumnos una situación suficientemente rica que tenga por objetivo la realización de los 5 pasos anteriores.

OBJETIVOS

El objetivo general de la investigación, de acuerdo con el marco teórico adoptado, se concretó en objetivos más específicos.

Objetivo general: Analizar el papel que juegan los objetos personales matemáticos y didácticos del profesor en la incorporación de situaciones contextualizadas al proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones en la asignatura “Introducción a la Matemática” impartida en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales (FaCES) de Carabobo (Venezuela).

Objetivos específicos:

- 1) Análisis epistemológico e histórico del objeto función real.
- 2) Análisis de los resultados ofrecidos por la investigación didáctica sobre las funciones.
- 3) Análisis del currículo de FaCES y otros currículos de diferentes universidades Venezolanas con Facultades de Ciencias Económicas y Sociales.
- 4) Estudio de los textos y otros documentos didácticos utilizados por los docentes de la asignatura para enseñar las funciones.
- 5) Averiguar los puntos de vista de los docentes sobre la posibilidad de incorporar matemática contextualizada y modelizada al proceso de instrucción del objeto función.
- 6) Analizar la competencia de los docentes en la resolución de situaciones contextualizadas en las que intervienen las funciones.
- 7) Analizar la resolución de problemas contextualizados en los que intervienen las funciones por parte de los alumnos
- 8) Identificar las opiniones de los profesores en cuanto a la matemática y su enseñanza
- 9) Estudiar puntos de consenso en la institución FaCES para la introducción de la matemática contextualizada y modelizada en el currículo de la asignatura con relación al objeto función.
- 10) Diseñar una secuencia de actividades consensuada en la institución para la enseñanza aprendizaje de las funciones en la asignatura “Introducción a la Matemática” que contemple situaciones contextualizadas.

CONTEXTO Y SUJETOS DE LA INVESTIGACIÓN

La asignatura “*Introducción a la Matemática*” pertenece al bloque de materias ubicadas en el Ciclo Básico de la Facultad FaCES y consta de cuatro unidades: 1) Elementos de la Lógica Proposicional, 2) Introducción a la Teoría de Conjuntos, 3) Introducción al Estudio de Funciones Lógicas y 4) Introducción al Estudio de las Funciones Reales.

La cátedra “Introducción a la Matemática” tiene un total 15 profesores, once profesores ordinarios y cuatro profesores contratados. Esta cátedra tiene autonomía para modificar el currículum.

METODOLOGÍA

La investigación es: 1) Etnográfica: ya que se pretende comprender los acontecimientos tal y como los interpretan los sujetos investigados, mediante una inmersión en su pensamiento y en su práctica. 2) □ Longitudinal: La información será obtenida en diferentes momentos a lo largo de un periodo de dos cursos. 3) □ De campo: la información se obtendrá en el lugar de trabajo de los sujetos investigados. Los instrumentos que se han previsto son:

- 1) Publicaciones sobre la historia de las funciones y publicaciones de investigaciones sobre la didáctica de las funciones, la contextualización y la modelización.
- 2) Los documentos curriculares, libros de texto y exámenes de la institución

- 3) Cuestionarios para determinar la competencia de los docentes y alumnos en la resolución de problemas contextualizados en los que interviene el objeto función.
- 4) Cuestionario para averiguar los puntos de vista de los docentes sobre la posibilidad de incorporar matemática contextualizada y modelizada al proceso de instrucción del objeto función.
- 5) Entrevista semiestructurada, grabada en video, para comentar y triangular sus respuestas a los dos cuestionarios anteriores.
- 6) Cuestionario de ponderación para determinar su posicionamiento sobre las matemáticas en general con el objetivo de buscar relación (o no) entre su visión de las matemáticas y la propuesta curricular de la institución.
- 7) Seminario sobre funciones y contextualización. Este seminario será coordinado por uno de los investigadores y será grabado en video.

FASES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se realiza en dos fases claramente diferenciadas. Los objetivos de la primera fase (ya realizada), en la que los investigadores tuvieron una posición no participante, fueron: (1) conocer algunos elementos del currículo pretendido y del implementado en la institución con relación al objeto función, (2) conocer la competencia de los docentes en la resolución de problemas contextualizados sobre funciones, (3) conocer sus argumentos para la introducción (o no) de una enseñanza contextualizada de las funciones y (4) averiguar si el currículo implementado actualmente en la institución es consecuencia de una posición clara de los profesores sobre la naturaleza de las matemáticas. Se trata básicamente de una primer etapa de recogida de información con relación a las prácticas realizadas en la institución y con relación a la argumentación de los profesores sobre dichas prácticas. En esta primera fase se utilizaron los instrumentos 1-6 para conseguir los ocho primeros objetivos.

En la segunda fase (en fase de realización) se pretende, por medio de un curso de formación sobre las funciones, llegar a un consenso racional sobre la posibilidad (o no) de incorporar situaciones contextualizadas a la enseñanza de las funciones en la institución. Para ello, utilizaremos los principales argumentos detectados en la primera fase de la investigación, dudaremos de su validez dando razones que, como mínimo, los hagan dudosos y pediremos a los docentes que hagan una argumentación para desarrollar o recusar las pretensiones de validez que se han vuelto dudosas, con el objetivo de llegar (o no) a un consenso en la institución que pueda llegar a modificar el currículo pretendido y el actualmente implementado en la institución. En esta segunda fase uno de los investigadores será, además, el coordinador del seminario. En esta segunda fase se utilizará el instrumento nº 7 para conseguir los dos últimos objetivos (9 y 10).

RESULTADOS DE LA PRIMERA FASE

A continuación comentamos brevemente los principales resultados obtenidos en la primera fase de la investigación.

El análisis de los documentos curriculares, libros de texto y exámenes de la institución nos permitieron obtener el siguiente resultado:

Resultado n. 1

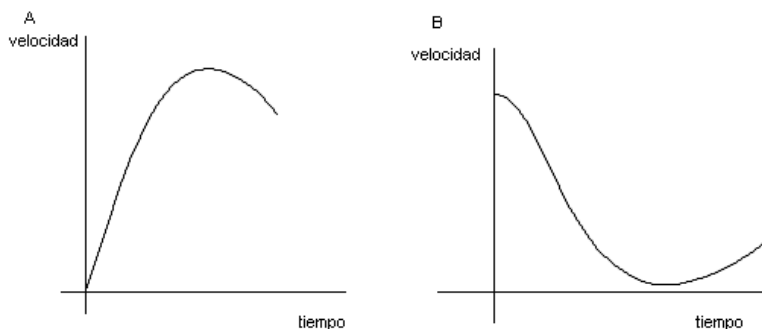
- La enseñanza actual de las funciones en la institución investigada es formalista y descontextualizada.

El instrumento n.º 3 (cuestionario profesores) tenía por objetivo determinar la competencia de los docentes en la resolución de problemas contextualizados en los que interviene el objeto función. Se trata de problemas de una dificultad mediana que los profesores tenían que resolver. A pesar de que los profesores que contestaron eran competentes en el uso descontextualizado de las funciones cometieron errores al resolver los problemas contextualizados del cuestionario. Por ejemplo, las respuestas al problema n.º 3 fueron:

Problema 3. Queremos representar una gráfica para describir la variación de la velocidad que experimenta una pelota de baloncesto en un lanzamiento de tres puntos, desde el momento que sale de las manos del jugador hasta que llega a la canasta.

a) ¿Cuál de las dos gráficas siguientes crees que es la más correcta? ¿Por qué?

b) ¿Cuál crees que será la gráfica que escogerán los alumnos?



Profesores	Respuestas
1	B, porque se trata de una variación de velocidad
2	B, inicialmente la velocidad es distinta de cero y luego decrece
3	A, debido a que es un lanzamiento inclinado hacia arriba en el vacío
4	B, porque la velocidad disminuye a medida que pasa el tiempo
5	A, la pelota es lanzada hacia arriba
6	A

El hecho de que en cinco de las ocho preguntas (1,3,4,5 y 6) la mitad de los profesores se equivocaran en sus respuestas nos permitió obtener los siguientes resultados

Resultado n. 2

El hecho de utilizar los objetos matemáticos de manera descontextualizada con rigor y competencia, no asegura que dichos objetos se pueden aplicar correctamente a la resolución de problemas contextualizados no rutinarios.

Como corolario del resultado anterior se obtiene el siguiente resultado (n.º 3), ya que es de suponer que los alumnos tendrán más dificultades que los profesores para resolver

problemas contextualizados. A este resultado también llegamos después de aplicar otro cuestionario a 38 alumnos (instrumento 3b).

Resultado n. 3

- El significado global de los alumnos que han cursado la asignatura “Introducción a la Matemática” no incorpora prácticas que permitan resolver la mayoría de problemas contextualizados no rutinarios en los que interviene el objeto función.

El hecho de que los alumnos fracasasen en este tipo de problemas y muchos profesores también permite llegar al siguiente resultado:

Resultado n. 4

- La validez del siguiente argumento, considerado válido por algunos docentes, es dudosa: *la matemática que se enseña en la asignatura “Introducción a las Matemáticas” puede ser aplicada posteriormente por el alumno, con cierta facilidad, a situaciones contextualizadas.*

El instrumento n.º 4 (cuestionario) tenía por objetivo saber: 1) la opinión de los docentes con relación a la ubicación de los problemas del cuestionario en el currículum de la asignatura, 2) su opinión sobre la utilidad de dichos problemas para los alumnos, 3) cuál era el aspecto que consideraban más novedoso de este tipo de problemas, 4) las dificultades que, en su opinión, podían tener los alumnos al resolver estos problemas y 5) qué contenidos del currículum se tendrían que modificar para incorporar este tipo de problemas.

Con el objetivo de triangular las opiniones de los profesores, estos aspectos se volvieron a tratar en una entrevista semi-estructurada, de 30 minutos aproximadamente, grabada en video (instrumento n.º 5) que se realizó a cada uno de los seis profesores siguiendo un guión previo. Los resultados de esta triangulación fueron los siguientes:

Resultado n.º 5

- La mayoría de los docentes tiene buena disposición para incorporar matemática contextualizada al proceso de instrucción del objeto función. Su buena disposición se basa en argumentos de tipo emocional sobre el alumno (este tipo de situaciones los va a motivar) y en argumentos de tipo epistémico (son el tipo de situaciones en las que tendrá que aplicar posteriormente sus conocimientos matemáticos).

Resultado n.º 6

- Con relación a los problemas que se les propusieron los docentes se mostraron muy partidarios de introducir problemas en los que el contexto fuese una situación económica (costo, compra, etc.) y menos partidarios de problemas en los que se utilizaran contextos poco relacionados con la economía.

Resultado n.º 7

- A pesar de la buena disposición manifestada, los docentes consideran dos tipos de dificultades para la incorporación de la enseñanza contextualizada de las funciones. La primera tiene que ver con argumentos de tipo cognitivo (falta de recursos previos de los alumnos) y la segunda con argumentos mediacionales (falta de tiempo).

Resultado nº 8

- Con relación a la manera en la que se tendría que incorporar este tipo de enseñanza contextualizada todos opinan que se han de reunir todos los profesores de la institución y tienen que llegar a un acuerdo consensuado para incorporar (o no) este tipo de enseñanza.

Resultado nº 9

- Los profesores se muestran partidarios de mantener primero el modelo de enseñanza formal y descontextualizado para después, en la misma asignatura, pasar a las aplicaciones de las matemáticas a situaciones de la vida real (un profesor discrepa y propone que no formen parte de la asignatura y sean propuestas a otras asignaturas de cursos superiores). Esta opinión puede dar pie a un cambio del currículum pretendido de la asignatura que implique la incorporación de situaciones contextualizadas.

Puesto que el resultado anterior se puede interpretar como la constatación de que estos profesores actúan en la práctica como si tuvieran unas creencias y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza de tipo platónico, el siguiente paso de nuestra investigación fue preguntarnos si realmente era así. Es decir, nos planteamos averiguar si en su discurso podíamos hallar argumentos, más propios de puntos de vista no platonistas sobre las matemáticas, que pudieran dar pie también a un cambio que implicara la incorporación de situaciones contextualizadas en la asignatura "Introducción a las Matemáticas" (como aplicación de la teoría previamente enseñada o bien como paso previo para construir la teoría). Para ello, diseñamos el instrumento n.º 6, se trata de un cuestionario de escala valorativa (ver anexo) sobre diferentes maneras de entender las matemáticas y sobre diferentes maneras de enfocar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se derivan de ellas. Para la elaboración de sus 30 ítems utilizamos la clasificación propuesta en Font (2003).

Los 30 ítems se pueden agrupar de diferentes maneras para hacer aflorar conclusiones que, en el seminario de formación previsto en la segunda fase de la investigación, se pueden utilizar como argumentos, de validez dudosa, sobre los cuales reflexionar conjuntamente. A continuación siguen algunas de las agrupaciones que contemplamos y sus conclusiones correspondientes.

Platonismo

- 5.- El conocimiento matemático esencialmente es fijo e inmutable.
- 9.- Los objetos matemáticos son entidades ideales existentes objetivamente, diferentes de los árboles, sillas, etc., que podemos intuir merced a una cierta facultad intelectual.
- 10.- Los problemas que originaron las teorías matemáticas, si bien fueron importantes en su momento, no deben jugar después ningún papel importante en su organización.
- 11.- Las representaciones de los objetos matemáticos son secundarias y relativamente "neutras" ya que en definitiva son diferentes maneras de representar objetos matemáticos ahistóricos.
- 23.- Los objetos matemáticos son construcciones y no existen en un mundo intemporal, sólo son construcciones mentales materializadas en signos.

Grado de acuerdo

Pregunta	T. Desacuerdo	Desacuerdo	Neutral	De acuerdo	T. acuerdo
5	5	3	2		

9	1	2	3	1	3
10	3	4	1		
11	1	3	2	3	1
23	1	5	1	2	1

Conclusión: Los docentes se muestran moderadamente partidarios del platonismo. Por una parte se muestran en desacuerdo con la afirmación del ítem 5, pero por la otra se muestran de acuerdo con la afirmación del ítem 9 y también se muestran en desacuerdo con la afirmación del ítem 23 que niega la existencia de objetos matemáticos intemporales. Si bien podemos concluir que los docentes son partidarios de un cierto tipo de platonismo, se muestran en desacuerdo con una de las posibles consecuencias del punto de vista platónico, el olvido de los problemas que dieron lugar al descubrimiento de los objetos matemáticos. También resulta significativo que la mitad de los docentes se muestra de acuerdo con la afirmación de que las representaciones de los objetos matemáticos juegan un papel secundario.

Formalismo (enunciado de las preguntas en el anexo)

Pregunta	T. Desacuerdo	Desacuerdo	Neutral	De acuerdo	T. acuerdo
14	1	2	1	5	1
15	2	1	0	5	2
16	0	3	2	3	2
17	0	4	1	4	1
18	5	2	3		
19	0	1	1	5	3
20	2	6	2	0	2

Conclusión: Los docentes suscriben el punto de vista formalista característico de la enseñanza de las matemáticas en las instituciones universitarias (se muestran de acuerdo mayoritariamente con los ítems 14 y 15) y casi la mitad considera que para comprender un concepto matemático no son necesarias situaciones de referencia no matemáticas que le den sentido (ítem 17). Pero, por otra parte, se muestran en desacuerdo con ciertos aspectos relacionados con la enseñanza formalista de las matemáticas como son la enseñanza de las matemáticas centradas en ellas mismas (ítem 18) y descontextualizadas (ítem 20). También son conscientes de la desmotivación que este tipo de enseñanza puede producir en los alumnos (ítem 20).

La combinación entre un cierto platonismo con relación a la existencia de los objetos matemáticos y un cierto formalismo en la organización y presentación de las matemáticas era un resultado esperado y es el que en nuestra opinión explica que los docentes se manifiesten en desacuerdo con afirmaciones de tipo intuicionista o falibilista y de acuerdo con afirmaciones de tipo convencionalista. En efecto, los docentes se muestran divididos con relación al principio básico del intuicionismo (ítem 21), se muestran más de acuerdo cuando este principio se aplica a los números naturales (ítem 22) pero esta aceptación del intuicionismo desaparece cuando la posición construccionista niega la existencia intemporal de los objetos matemáticos (ítem 23). Por otra parte, Los docentes se muestran claramente en desacuerdo con una visión

empirista radical de las matemáticas (ítem 12) pero este desacuerdo se reduce a la mitad cuando la tesis anterior se suaviza y se presenta formulada en los términos cuasi-empiristas o falibilistas de Lakatos (1981). El peso del formalismo en nuestra opinión explica que los docentes se muestren claramente de acuerdo con una afirmación de tipo convencionalista (ítem 30) formulada en términos de la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein (1987).

En cambio, la mezcla de platonismo y formalismo no les lleva a recusar afirmaciones de tipo constructivista (ítems 26, 27 y 28) realizadas en términos de Piaget (1979) o de Lafoff y Núñez (2000) con las cuales se muestran muy de acuerdo, incluso más de acuerdo que con las afirmaciones de tipo platonista o formalista. 8 profesores están de acuerdo con los ítems 26 y 27 y la mitad con el ítem 28.

El análisis de esta parte del anexo nos llevó a los siguientes resultados:

Resultado nº 10

Los docentes no tienen opiniones claras sobre la naturaleza de las matemáticas, más bien presentan una mezcla de diferentes posiciones con un cierto predominio de una mezcla de platonismo y formalismo.

Resultado nº 11

La modulación de la enseñanza de las matemáticas que actualmente se realiza en la institución (primero las matemáticas y después las aplicaciones en cursos posteriores) no es el resultado de una posición meditada y reflexionada sobre lo que son las matemáticas.

SEGUNDA FASE DE LA INVESTIGACIÓN

La segunda fase de la investigación consistirá en un seminario de formación que será coordinado por uno de los investigadores. El seminario se estructurará en las siguientes partes: 1) Resultados de la investigación didáctica sobre las funciones, 2) Resultados de la investigación didáctica sobre contextualización y modelización, 3) Análisis y valoración de diferentes secuencias didácticas que incorporan la contextualización y la modelización en el estudio de las funciones, 4) Presentación de los resultados de la primera fase de la investigación, 5) Reflexión colectiva sobre la conveniencia (o no) de incorporar situaciones contextualizadas a la enseñanza de las funciones y, en el caso de llegar a un consenso sobre la necesidad de incorporar la contextualización a la enseñanza actual de las funciones, 6) Elaboración de una secuencia de actividades que incorporen la contextualización a la enseñanza de las funciones.

En esta segunda fase (que está en proceso de realización) se pretende primero dar una información a los profesores para pasar después a la presentación de los resultados de la primera fase, dudar de su validez dando razones que, como mínimo, los hagan dudosos y después pedir a los docentes que hagan una argumentación para desarrollar o recusar sus pretensiones de validez con el objetivo de llegar (o no) a un consenso en la institución.

CONCLUSIONES FINALES

Los resultados de esta investigación son de tres tipos: teóricos, empíricos y metodológicos. Una de las principales aportaciones de esta investigación es de tipo teórico y consiste en el desarrollo de la Teoría de las Funciones Semióticas para poder analizar tanto los objetos matemáticos y didácticos de los profesores como el cambio en

una institución. La primera parte de esta investigación también aporta resultados empíricos importantes como son:

- La enseñanza actual de las funciones en esta institución es formalista y descontextualizada.
- Hacer dudoso el argumento, considerado válido por algunos docentes, de que la matemática que se enseña en la asignatura “Introducción a las Matemáticas Analizar” puede ser aplicadas posteriormente por el alumno, con cierta facilidad, a situaciones contextualizadas.
- Las dos razones que hacen dudosa esta afirmación es que los alumnos fracasan en este tipo de problemas, pero también lo hacen los mismos docentes que consideran válido el argumento anterior.
- La mayoría de los docentes tiene buena disposición para incorporar matemática contextualizada y modelizada al proceso de instrucción del objeto función. Su buena disposición se basa en argumentos de tipo emocional sobre el alumno (este tipo de situaciones los va a motivar) y en argumentos de tipo epistémico (son el tipo de situaciones en las que tendrá que aplicar posteriormente sus conocimientos matemáticos)
- A pesar de la buena disposición manifestada, los docentes consideran dos tipos de problemas para la incorporación de la enseñanza contextualizada de las funciones. El primero tiene que ver con argumentos de tipo cognitivo (falta de recursos previos de los alumnos) y el segundo tiene que ver con argumentos mediacionales (falta de tiempo).
- La enseñanza de las funciones que actualmente se realiza en esta institución (primero las matemática y después las aplicaciones en cursos posteriores) no es el resultado de una posición clara sobre lo que son las matemáticas.
- Los docentes no tienen un punto de vista claro sobre las matemáticas, más bien presentan una mezcla de diferentes posiciones con un cierto predominio de una mezcla de platonismo y formalismo.

Algunos de estos resultados son específicos del caso estudiado, pero hay otros que apuntan más allá de él. Por último, hay resultados metodológicos importantes entre los que destaca la elaboración del cuestionario de escala valorativa (anexo) sobre diferentes maneras de entender las matemáticas y sobre diferentes maneras de enfocar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se derivan de ellas.

ANEXO

A continuación se te ofrecen una serie de enunciados, indica tu grado de aceptación, en cada caso, según el siguiente convenio:

1 Totalmente en desacuerdo **2** En desacuerdo **3** Neutral (ni de acuerdo ni en desacuerdo) **4** De acuerdo **5** Totalmente de acuerdo

- 1.- Las matemáticas son esencialmente un conjunto de conocimientos (hechos, reglas, fórmulas y procedimientos) socialmente útiles.
- 2.- Las matemáticas son esencialmente una manera de razonar y resolver problemas.
- 3.- Se supone que las matemáticas no tienen que tener significado.
- 4.- Las matemáticas implican principalmente memorización y seguimiento de reglas.
- 5.- El conocimiento matemático esencialmente es fijo e inmutable.

- 6.- Las matemáticas están siempre bien definidas, no están abiertas a cuestionamientos, argumentos o interpretaciones personales.
- 7.- La habilidad matemática es esencialmente algo con lo que se nace o no se nace
- 8.- Los matemáticos trabajan típicamente aislados unos de otros.
- 9.- Los objetos matemáticos son entidades ideales existentes objetivamente, diferentes de los árboles, sillas, etc., que podemos intuir merced a una cierta facultad intelectual.
- 10.- Los problemas que originaron las teorías matemáticas, si bien fueron importantes en su momento, no deben jugar después ningún papel importante en su organización.
- 11.- Las representaciones de los objetos matemáticos son secundarias y relativamente "neutras" ya que en definitiva son diferentes maneras de representar objetos matemáticos ahistóricos.
- 12.- Las matemáticas es una ciencia que depende de las "cosas" como los árboles, sillas, etc. exactamente igual a como dependen de ellas las ciencias experimentales.
- 13.- En la enseñanza de las matemáticas hay que rechazar la manipulación formal de símbolos escritos en beneficio de las experiencias físicas subyacentes que les correspondan. Sólo éstas pueden dar sentido a las manipulaciones simbólicas y proporcionar un significado intuitivo a las conclusiones que se obtengan.
- 14.- Las matemáticas son verdades que no dependen de la experiencia, aunque la experiencia puede ser muy útil para descubrirlas.
- 15.- Las dificultades que se producen en el aprendizaje de las matemáticas son causadas, básicamente, por las presentaciones defectuosas de la matemática preuniversitaria (definiciones poco precisas, conceptos no suficientemente generales, demostraciones poco rigurosas, etc.) que inducen en el alumno una concepción confusa de la matemática por la ausencia de una estructura deductiva rigurosa
- 16.- Las matemáticas que se presentan como unos conocimientos terminados y organizados deductivamente permiten poner de manifiesto al alumno la ordenación lógica de la materia, pero, al presentar el producto terminado, impiden la acción, las conjeturas, la imaginación, la aplicación a situaciones de la vida cotidiana, etc.
- 17.- Para comprender un concepto matemático, son necesarias situaciones de referencia no matemáticas que le den sentido.
- 18.- Conviene presentar unas matemáticas centradas sobre ellas mismas y muy alejadas de las otras ciencias.
- 19.- Si los textos didácticos ofrecen pocas situaciones no matemáticas que permitan a los alumnos conocer la aplicación de las matemáticas a la realidad, se facilita preguntas del tipo "esto para qué sirve".
- 20.- Conviene presentar los conceptos matemáticos de la manera más general posible y separados de los contextos que les dan sentido, para así evitar las dificultades de comprensión que la presentación contextualizada pudiese producir.
- 21.- Estás de acuerdo con el principio de construcción o de constructibilidad, que es el principio básico del intuicionismo matemático, el cual afirma que la matemática es el estudio de un cierto tipo de construcciones mentales.
- 22.- Los números naturales se construyen inmediatamente en la mente del sujeto y su verdad se basa en la evidencia de la intuición.
- 23.- Los objetos matemáticos son construcciones y no existen en un mundo intemporal, sólo son construcciones mentales materializadas en signos.
- 24.- las matemáticas es una ciencia que presenta las mismas características que las ciencias empíricas. Es decir, que también son falibles, y que también se desarrollan gracias a la crítica y a la corrección de teorías que nunca están enteramente libres de ambigüedades y en las que siempre cabe la posibilidad de error o de omisión.
- 25.- Se debe enseñar las matemáticas a partir de la resolución de problemas y hacer ver a los alumnos que las matemáticas se pueden aplicar a situaciones de la vida real.

Ramos, A.B.; Font, V. (2004). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. En C. de Castro y M. Gómez (Eds.) *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 119-134). Barcelona: EDEBÉ.

- 26.- La esencia del pensamiento matemático es la universalidad y la necesidad, y cualquier sujeto, como resultado del proceso evolutivo de especie, está biológicamente preparado para desarrollar un pensamiento matemático universal y necesario.
- 27.- el conocimiento matemático es una construcción que no es una invención ni un descubrimiento. Pero que, en cierta manera, esta construcción tiene algo de descubrimiento, ya que, como resultado de un proceso evolutivo de la especie, todos estamos en condiciones de construir el mismo conocimiento; y también hay algo de invención porque las construcciones matemáticas pueden ir en distintas direcciones.
- 28.- Las matemáticas son el resultado de la experiencia humana pero no es el resultado de puras convenciones sociales, ya que por razones de tipo evolutivo todos desarrollamos los mismos mecanismos cognitivos de los que surgen las matemáticas.
- 29.- Las matemáticas son un producto histórico que se consideran universales y necesarias porque han resultado útiles para organizar nuestro conocimiento de las "cosas" de nuestra experiencia.
- 30.- La verdad, certeza o "necesidad" matemática no es más que el "estar de acuerdo" con el resultado de seguir una regla que forma parte de las prácticas matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

- FONT, V. (2003). Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol X, nº 2, 249-279.
- GODINO J. D. (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 22 (2/3), 237-284.
- GODINO J. D. y BATANERO C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- JANVIER, C.: (1987). Translation processes in mathematics education, en Janvier, C. (ed.): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (págs. 27-32). Hillsdale, New Jersey : Lawrence Erlbaum A.P.
- LAKATOS, I. (1981) *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza Editorial.
- LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
- MARCELO, C. (2002). La investigación sobre el conocimiento de los profesores y el proceso de aprender a enseñar, en Gerardo Andrés Perafán y Agustín Adúriz-Bravo (Comp.) *Pensamiento y conocimiento de los profesores. Debate y perspectivas internacionales* (pp. 45-60). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional-Colciencias.
- MARTÍNEZ, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- MORENO Y AZCÁRATE (2003) Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 21(2), 265-280.
- PIAGET, J. (1979). Los problemas principales de la epistemología de la matemática, en J. Piaget (comp.), *Epistemología de la matemática* (pp. 147-182). Buenos Aires: Paidós.

Ramos, A.B.; Font, V. (2004). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. En C. de Castro y M. Gómez (Eds.) *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 119-134). Barcelona: EDEBÉ.

SFARD, A.: (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function, en E. Dubinsky y G. Harel (eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Washington D.C: MAA Notes 25, págs 59-84.

VALERO, P. (1999). Deliberative mathematics education for social democratización in Latin America. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 98(6), 20-26.

WITTGENSTEIN, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.