ALGUNAS APLICACIONES DE LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES SEMIÓTICAS A LA DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS INFINITESIMAL

Ángel Contreras[*], Vicenç Font[**], Lorenzo Luque[***], Lourdes Ordóñez[****]

RESUME

Dans la première partie de ce travail nous présentons un résumé de la théorie des fonctions sémiotiques. Dans la deuxième, nous exposons différentes recherches sur la didactique de l'analyse où cette théorie a été utilisée comme cadre. La contribution de ces travaux de recherche est remarquable pour deux raisons. D'abord ils ont permis de détecter certains phénomènes didactiques et de suggérer la cause qui les a produits. Puis ils ont facilité la mise à point d'une technique d'analyse des textes mathématiques de type ontologico-sémiotique qui se montre dans cet article grâce à l'étude d'un texte où l'on définit la fonction dérivée.

ABSTRACT

In the first part of this study, we show a summary of the Semiotics Functions Theory. In the second part, we write about several researches about didactic of mathematic calculus, where this theory is used as a frame. The contribution of this studies is relevant in two aspects. First, they have allowed to detect certain phenomena and suggest the reason why they are produced. Secondly, they have the fine-tuning of an analysis technique of mathematic texts of ontologic-semiotic kind, which is illustrated in this article through the study of a text in which is defined the derivate function.

RESUMEN

En la primera parte de este trabajo presentamos un resumen de la teoría de las funciones semióticas. En la segunda, comentamos diferentes investigaciones sobre la didáctica del análisis en las que se ha utilizado como marco esta teoría. La aportación de dichos trabajos es relevante en dos aspectos.

---

[*] Ángel Contreras, Universidad de Jaén (España), afuente@ujaen.es

[**] Vicenç Font, Universidad de Barcelona (España), vfont@d5.ub.es

[***] Lorenzo Luque, IES Az-zait, Jaén (España), loluque@supercable.es

[****] Lourdes Ordóñez, IES Albairza, Jaén (España), locanada@teleline.es

Recherches en Didactique des Mathématiques, 2005, Vol 25, n°2, pp. 151-186

Primeramente, han permitido detectar determinados fenómenos didácticos y sugerir la causa que los produce. En segundo lugar, han facilitado la puesta a punto de una técnica de análisis de textos matemáticos de tipo ontológico-semiótico que se ilustra en este artículo mediante el estudio de un texto en el que se define la función derivada.

Mots-clés: Enseñanza del análisis matemático, teoría de las funciones semióticas, significado pretendido, análisis ontosemiótico, derivada, bachillerato.

Consideramos que cualquier aproximación teórica a los problemas didáctico-matemáticos ha de contemplar, entre otras, las dimensiones epistemológica y cognitiva, puesto que dicha aproximación debe problematizar, por una parte, el saber matemático (dimensión epistemológica) y, por otra, estudiar los procesos cognitivos del alumno y del profesor (dimensión cognitiva). Un posicionamiento teórico que contempla de manera armónica ambas es el enfoque de la cognición matemática de Godino y Batanero. Estos investigadores, en sus trabajos sobre significado y comprensión de los objetos matemáticos, han desarrollado la teoría de los objetos institucionales y personales (Godino y Batanero, 1994) y la teoría de las funciones semióticas (Godino, 2002) — evolución de la anterior—. De esta forma, se ofrece un punto de vista pragmático, semiótico y antropológico que puede explicar muchos de los fenómenos que se producen en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Esta línea de trabajo ha sido asumida por otros investigadores y recientemente se ha aplicado a la didáctica del análisis matemático (Font, 2000a y 2000b; Contreras, 2001; Contreras y Font, 2002; Inglada y Font, 2003; Ordóñez y Contreras, 2003; Contreras, Luque y Ordóñez, 2004).

Por otra parte, se puede constatar que la didáctica del análisis matemático ha venido experimentando una evolución hacia enfoques de tipo antropológico y semiótico:

> «El periodo reciente conjuga, nos parece, una evolución de las problemáticas marcadas, por una parte, por el desarrollo global de los marcos teóricos en didáctica hacia propuestas antropológicas y socioculturales, y, por otra, por las necesidades didácticas suscitadas por las evoluciones culturales y sociales… La evolución global de la didáctica contribuye a situar las cuestiones institucionales y culturales en escena, a poner el acento sobre los instrumentos y especialmente los instrumentos semióticos entendidos en el sentido amplio del trabajo matemático.» (Artigue 1998, p. 248, la traducción es nuestra).

Por tanto, un marco teórico como el que se propone en este trabajo —que contempla significados de tipo institucional y personal bajo la perspectiva de la interpretación y negociación de dichos significados, por medio de las funciones semióticas— nos parece que puede ser adecuado para el estudio de la problemática de la enseñanza-aprendizaje de los objetos del análisis matemático.

El objetivo del artículo es explicar algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas — TFS a partir de ahora — a la didáctica del análisis. Una de estas aplicaciones consiste en la realización y análisis de procesos de estudio utilizando los constructos teóricos de la TFS (significado institucional de referencia, pretendido, implementado y evaluado, significado personal de los alumnos (global, declarado, etc.)), complejidad semiótica de las secuencias propuestas, detección de conflictos semióticos, etc. Otra aplicación es el análisis semiótico de textos. Nuestro objetivo es mostrar cómo estas aplicaciones de la TFS ponen en evidencia determinados fenómenos didácticos relacionados con la complejidad semiótica asociada a la función derivada.

En la primera parte del trabajo, destacamos algunos elementos del marco teórico de la TFS. En la segunda, exponemos dos investigaciones sobre la didáctica del análisis matemático en las que se ha utilizado como línea de investigación dicha teoría. La aportación de la aplicación de la TFS a la didáctica del análisis matemático, en nuestra opinión, es relevante en dos aspectos. Por una parte, han permitido detectar algunos fenómenos didácticos de interés y, por otra parte, poner a punto una técnica de análisis de textos matemáticos de tipo ontológico-semiótico que se ilustra en este artículo mediante el análisis de un texto en el que se define la función derivada.

1. MARCO TEÓRICO

En la TFS se considera a los objetos matemáticos como entidades emergentes de los sistemas de prácticas realizadas en un campo de problemas (Godino y Batanero, 1994) y, por tanto, son derivados de dichas prácticas. Es decir, al objeto matemático se le asigna un estatuto derivado, mientras que a la práctica se le dota de un lugar privilegiado, a diferencia de otras teorías en las que dicho objeto es quien tiene ese lugar privilegiado. Hay que tener en cuenta que la observación de las prácticas de los alumnos no se reduce a tomar nota de sus conductas, sino que, además, es necesaria, por parte del profesor, una interpretación del sentido que da el alumno a esta conducta, y de cómo soluciona y generaliza el problema a otros contextos y a nuevos problemas. Para la TFS**,** la construcción del conocimiento se realiza desde la actividad práctica, donde el dominio de las herramientas semióticas es un elemento básico, ya que, como señala Duval (2000), dichas herramientas son esenciales para la actividad cognitiva, aunque no se privilegia el uso de signos sobre la actividad práctica, ya que esto conduciría a una separación, no deseable, de la actividad lingüística de la práctica.

1. Los objetos personales e institucionales[1]

La relación que hay entre las prácticas y los problemas que las suscitan lleva a considerar que la relación que hay entre el campo de problemas y los sistemas de prácticas es donde tiene lugar el proceso de simbolización. Las experiencias se codifican significativamente, se procesan como signos, y éstos se manipulan y combinan, siguiendo reglas y métodos elaborados al efecto, para dar lugar a objetos matemáticos personales, los cuales van emergiendo en un aprendizaje suscitado por la propia práctica.

Un objeto personal implica la generación, por medio de la intersubjetividad que facilita la clase de matemáticas, de una regla de comportamiento en el sujeto. Este hecho es el que se toma en consideración en Godino y Batanero (1994) para definir el significado de un objeto personal como el sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado.

Los significados y los objetos personales son fenómenos individuales, pero al estar inmerso el sujeto en instituciones donde necesariamente se dan interacciones, tienen también un carácter colectivo, por tanto hay que considerar también los objetos institucionales (emergente del sistema de prácticas institucionales asociadas a la resolución de un campo de problemas) y sus significados (sistema de prácticas institucionales asociadas a la resolución de un campo de problemas), que son los constituyentes del conocimiento objetivo:

> « La distinción entre las facetas personal e institucional de los conocimientos matemáticos nos parece fundamental para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje". Además esto nos "permite caracterizar el aprendizaje como "acoplamiento progresivo" entre significados personales e institucionales ». (Godino 2002, p. 248).

Para explicar la dialéctica institucional-personal, la TFS considera, por su carácter operativo, diferentes tipos de significados institucionales y personales: significado institucional de referencia —delimitación de lo que es dicho objeto para las instituciones matemáticas y didácticas—, significado institucional pretendido —sistema de prácticas que se planifican sobre un objeto matemático para un cierto proceso instruccional—, significado institucional

---

[1] Para situar estos constructos teóricos con relación a la teoría antropológica de Chevallard consultar Godino 2002.

implementado — sistema de prácticas (operativas y discursivas) que efectivamente tienen lugar en la clase de matemáticas, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y las evaluaciones de los aprendizajes— y significado institucional evaluado —colección de tareas o cuestiones que incluye en las pruebas de evaluación y pautas de observación de los aprendizajes—.

Desde el punto de vista del estudiante cabe hacer la distinción entre el significado personal global —corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el alumno, relativas a un objeto matemático—; el declarado —da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional—; y el logrado —corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

2. Entidades primarias, facetas y funciones semióticas

Entidades primarias

Como se señala en Godino (2002, pp. 245):

> « En la descripción de la actividad matemática, nos referimos a muchos y diversos objetos, los cuales se pueden agrupar según distintos criterios formando categorías o tipos diversos ».

En nuestro caso, utilizaremos las entidades primarias que distingue este autor: lenguaje, situaciones, conceptos, propiedades, acciones y argumentaciones, las cuales, a su vez, conforman otras entidades matemáticas más complejas. Las prácticas se pueden analizar y descomponer según relaciones en las que intervienen entidades más simples, lo cual no supone que existan unas entidades "elementales" que sean irreducibles.

Facetas o dimensiones de la actividad matemática

La noción de juego de lenguaje (Wittgenstein 1983) ocupa un lugar importante en la descripción de la actividad matemática:

> « Según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal – institucional; ostensiva - no ostensiva; intensiva – extensiva (tipo - ejemplar); elemental – sistémica; expresión – contenido ». (Godino 2002, p. 248).

En este artículo únicamente se comentará las faceta extensiva-intensiva / ejemplar-tipo, puesto que es la que fundamentalmente interviene en el ejemplo que se analiza en la sección 2. La TFS interpreta la distinción entre extensivo-intensivo en un sentido lingüístico, esto es, como equivalente a la distinción entre el ejemplar (algo particular, que se determina por sí mismo) y el tipo (objeto genérico que define una cierta clase o conjunto más o menos difuso de objetos), por lo que un mismo objeto, según el contexto, se puede interpretar como un caso particular o como uno general.

Funciones semióticas

La actividad matemática se caracteriza esencialmente por su carácter relacional, lo que se pone de manifiesto en el concepto de función semiótica. Se denomina de esta manera a las:

> « [...] correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión significante) y un consecuente (contenido o significado) establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. » (Godino, 2002, p. 252).

Hay que tener en cuenta que el papel expresión y contenido puede ser desempeñado por cualquiera de las entidades y que, a su vez, una función semiótica puede ser la expresión de otra nueva, lo que da lugar a una semiótica connotativa.

3. Análisis ontológico-semiótico de un texto matemático

En Godino (2002), se propone una técnica del *análisis ontológico-semiótico* de un texto matemático que consiste básicamente en: 1) su descomposición en unidades, 2) la identificación de las entidades puestas en juego y 3) identificación de las funciones semióticas que se establecen entre las mismas por parte de los distintos sujetos. Este análisis ontológico-semiótico permite formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos actores en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación, o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación de significados y cambios en el proceso de estudio.

Hablaremos de *análisis a priori* cuando dicha técnica se aplica a un texto que registra una actividad matemática que tiene que realizar un sujeto potencial (por ejemplo un libro de texto) y de *análisis a posteriori c*uando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los sujetos en interacciones efectivas. En ambos casos se pueden detectar *conflictos semióticos*:

> « [...] disparidad o desajuste entre los contenidos atribuidos a una misma expresión por el alumno y la institución. » (Godino, 2002, p. 258).

Los análisis a priori permiten formular hipótesis sobre conflictos semióticos potenciales —entre los cuales destacan, por su relevancia, aquellos que origina un libro de texto al dejar a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto y que, de no producirse, pueden ocasionar una disparidad entre el significado personal global del alumno y el significado institucional pretendido—. Por su parte, los análisis a posteriori permiten determinar los conflictos semióticos realmente producidos y contrastarlos con los detectados a priori. En la TFS, los conflictos semióticos se consideran como explicaciones de las dificultades y limitaciones de los aprendizajes matemáticos efectivamente realizados cuando los comparamos con el significado pretendido.

Los dos tipos de análisis comentados también permiten detectar limitaciones en los aprendizajes matemáticos efectivamente realizados. Nos referimos a las limitaciones originadas por significados institucionales (pretendidos o implementados) poco representativos de los significados referenciales. Estas limitaciones se producen cuando determinadas prácticas representativas del significado de referencia no son contempladas en el significado pretendido o implementado. Por ejemplo, cuando el significado pretendido sólo contempla que el cálculo de la derivada en un punto consiste en la aplicación de una regla de derivación algebraica y en el cálculo del valor de la función en dicho punto pero no contempla otras prácticas. Nos referimos en concreto a argumentaciones de tipo variacional que permiten calcular la derivada como límite de las razones de cambio o bien a argumentaciones de tipo gráfico que permiten calcular la derivada como la pendiente de la recta tangente.

Según la mayor o menor profundidad del estudio ontológico-semiótico, pueden considerarse otros dos tipos de análisis: uno, más amplio, centrado fundamentalmente en el segundo punto (identificación de las entidades puestas en juego), y otro, más pormenorizado, centrado fundamentalmente en el tercer punto (identificación de las funciones semióticas que se establecen entre las diferentes entidades y facetas duales por parte de los distintos sujetos) en el que el sujeto pasa a primer plano. El primer tipo de análisis, que podemos denominar "grueso" o "macroscópico", a pesar de su potencia explicativa, presenta limitaciones importantes y es insuficiente cuando se considera también la cognición de las personas.

El segundo tipo de análisis permite un mayor refinamiento gracias a la introducción de las cinco facetas duales que contempla la TFS, y especialmente por la consideración de las facetas expresión-contenido, intensivo-extensivo y elemental-sistémico.

En este trabajo, para realizar este segundo tipo de análisis ontológico-semiótico que llamaremos microscópico, se descompone el texto en unidades de análisis y se estudian las funciones semióticas establecidas. Dicha descomposición no es única sino que depende del propio investigador, quien debe efectuar la que mejor explique las relaciones dialécticas existentes entre las entidades presentes. Algo similar puede decirse de la descomposición en subunidades. El paso de una subunidad a otra subunidad se describe con las funciones semióticas.

Una de las ventajas (Font 2000b) que presenta el uso de las funciones semióticas es que permiten describir con un lenguaje unificado muchos de los procesos que se han estudiado en el campo del pensamiento matemático avanzado y que, en los diferentes trabajos de investigación, están descritos con terminologias diferentes —por ejemplo, para ver como se describen la encapsulación y desencapsulación (Dubinsky 1991) se puede consultar Font 2000b y para los procesos metafóricos, Acevedo, Font y Giménez 2004—.

Para el proceso de análisis que desarrollamos en la segunda parte de este artículo se considerará como expresión o contenido de la funciones semióticas básicamente la faceta extensiva-intensiva de los objetos matemáticos ya que:

> « [...] puede ser una noción útil para describir la disposición matemática hacia la generalización y explicar algunos conflictos en los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático derivados de la confusión entre ejemplar y tipo. » (Godino, 2002 pp 251).

Se considerarán, por tanto, las siguientes funciones semióticas:

	Extensional	Intensional
Extensional	FS1	FS2
Intensional	FS3	FS4

Tabla 1

FS1 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con otra entidad extensional

FS1.1 Relaciona un objeto con otro de la misma clase.

FS1.2 Relaciona un objeto con otro que no es de la misma clase.

FS2 Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con una entidad intensional

FS2.1 Relaciona un objeto con la clase a la que pertenece.

FS2.2 Relaciona un objeto con una clase a la cual no pertenece.

FS3 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con una entidad extensional.

FS3.1Esta función semiótica relaciona una clase con un ejemplo de la clase.

FS3.2 Esta función semiótica relaciona una clase con un objeto que no es de la clase.

FS4 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional.

FS4.1 Esta función semiótica define una clase de objetos de manera diferente.

FS4.2 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional diferente.

Estas funciones semióticas serán analizadas y ejemplificadas en la siguiente sección de este artículo.

2. APLICACIONES A LA DIDÁCTICA DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO

A continuación presentamos el diseño y puesta en práctica de un proceso de estudio, que tiene en cuenta la complejidad semiótica asociada a la función derivada puesta en evidencia por los análisis ontológico-semióticos propuestos por la TFS.

2.1. La complejidad semiótica asociada al objeto función derivada

Cada manera de introducir la función derivada conlleva una determinada complejidad semiótica. A continuación nos referiremos a la complejidad semiótica de tres maneras diferentes de introducir la función derivada en el bachillerato: 1) mediante la definición por límites, 2) hallando una condición que cumplan todas las tangentes y, a partir de ella, calcular dicha función derivada y 3) calcularla por medio de los valores de la derivada en diversos puntos, dados en una tabla. El primer método, que es el que normalmente se utiliza en los libros de texto españoles de bachillerato, consiste en definir la función derivada como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

El segundo método, sugerido por los procedimientos utilizados para construir la tangente y la normal en el periodo que va de Descartes a Barrow, considera, de entrada, un punto particular con la tangente o la normal dibujada (por tanto, su abscisa y ordenada, inicialmente, no se consideran variables). A continuación, a partir de la manipulación con programas informáticos dinámicos, tales como *Cabrigéomètre* o *Calcula*, se halla una condición que cumplen todas las rectas tangentes (por ejemplo en el caso de la parábola que la subtangente es la mitad de la abscisa), lo que permite calcular su pendiente. Por último, es necesario generalizar la condición que se ha hallado, y el cálculo de la pendiente que de ella se deriva, de manera que el punto, que inicialmente se consideró como un punto particular, pasa a ser considerado después como un punto cualquiera[2] (en el apartado 2.3 hay la respuesta de una alumna que aplica esta técnica para calcular la derivada de la función exponencial de base e y en el apartado 3 la de otra alumna que la aplica para calcular la derivada de $f(x) = x^2$).

Este segundo método tiene un campo de aplicación limitado ya que, previamente, el alumno ha de descubrir una propiedad que cumplen todas las rectas tangentes. Ahora bien, se puede aplicar, entre otras, a la familia de las funciones que tienen por gráfica una recta, y también a las funciones exponenciales y logarítmicas. El hecho de que se pueda aplicar este método para calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$ (todas las subtangentes valen 1) permite una organización de la unidad didáctica sobre derivadas que tiene importantes consecuencias curriculares (por ejemplo, permite prescindir del estudio de la indeterminación 1^∞).

El tercer método consiste en que, antes de introducir la función derivada a partir de la definición, se halla una función derivada particular: por ejemplo la derivada de la función $f(x) = x^2$. La manera de hacerlo consiste en observar que para diferentes valores de la abscisa –la derivada de los cuales ya se ha calculado en actividades previas–, la derivada en cada punto siempre es el doble del valor de la abscisa. Esta observación se generaliza y permite llegar a la conclusión de que la función $f(x) = 2x$ es una función que, para cada valor de la abscisa, nos permite hallar, calculando el doble, la derivada en este punto. A esta nueva función se le llama función derivada y se la representa por $f'(x) = 2x$. A continuación se trata de tomar este caso particular como un ejemplo genérico, lo cual lleva a considerar que lo que se ha hecho con la función $f(x) = x^2$ se puede hacer para una función cualquiera. Es decir, dada una función $f(x)$ se puede considerar una nueva función $f'(x)$ que a cada valor de la abscisa le hace corresponder el valor de la derivada en este punto (si existe).

No detallaremos aquí la comparación de las tramas de funciones semióticas implícitas sobre cada una de las tres maneras de introducir la función derivada, realizada a partir de análisis ontosemióticos como el que se expone en detalle en la sección 3. Sólo indicaremos que dicha comparación permite concluir que la definición de $f'(x)$ como un límite es la que presenta mayor complejidad semiótica, ya que implica funciones semióticas que presentan notables dificultades para los alumnos (ver Font (2000a).

---

[2] Este segundo procedimiento está explicado con más detalle, para el caso de la parábola, e ilustrado con producciones de alumnos en Font (2001, pp. 195-198)

2.2. Diseño del significado pretendido

La complejidad semiótica, un criterio a tener en cuenta.

Teniendo en cuenta tanto la complejidad semiótica como los conflictos semióticos potenciales y con el objetivo de resolverlos mediante una adecuada negociación de significados, en Font (2000a) se diseñó e implementó un proceso de estudio para el objeto función derivada que combina los tres métodos expuestos anteriormente. Se comenzó hallando una función derivada particular (la derivada de la función $f(x) = x^2$ tal como se ha descrito en el tercer método del apartado anterior). A continuación se tomó este caso particular como un ejemplo genérico que permitió institucionalizar el siguiente resultado: dada una función $f(x)$ se puede considerar una nueva función $f'(x)$ que a cada valor de la abscisa le hace corresponder el valor de la derivada en este punto (si existe). Seguidamente se utilizó la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto para hallar de una manera más rigurosa (utilizando el segundo método descrito en el apartado anterior) el resultado obtenido anteriormente: que la función derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$. Finalmente, se utilizó la interpretación de la derivada en un punto como tasa de variación instantánea para definir la función derivada como límite (primer método del apartado anterior).

La reflexión sobre los lenguajes utilizados en los tres procedimientos anteriores para el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ (en el primero sólo utilizamos expresiones simbólicas, en el segundo gráficas y en el tercero tablas), conduce a inferir que en este cálculo hay que considerar tres fases:

1) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$.

2) El paso de una forma de representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f'(x)$.

3) Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$.

Estos tres pasos se pueden concretar en diferentes técnicas[3] de cálculo de la función derivada según los ostensivos utilizados y además abre la posibilidad de considerar, en el nivel de bachillerato, alternativas al cálculo de la función derivada como límite de las tasas

[3] En Font (2000c, pp. 30-34) se explica como este proceso se concreta en 4 técnicas diferentes de cálculo de la derivada de la función seno en las que se activan diferentes ostensivos.

medias de variación, las cuales permitan la emergencia de $f'(x)$ como un objeto claramente diferenciado del objeto $f'(a)$.

Uno de los aspectos relevantes de la investigación descrita (Font 2000a) es la incorporación al significado pretendido de prácticas que forman parte de la evolución epistemológica del objeto derivada (uno de los elementos difusos del significado de referencia) y que hasta este momento no se contemplaban en las unidades didácticas sobre la derivada que pueden verse en el currículo español. Nos referimos al segundo procedimiento de cálculo de la función derivada considerado anteriormente. Se trata de proponer a los alumnos una secuencia de actividades informáticas que está a mitad de camino entre el problema de la tangente y su inverso —no es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya se tiene construida; ni es el problema inverso, ya que se conoce la expresión simbólica de la función—. Realizar la construcción con ordenador facilita las acciones de los alumnos sobre dicha construcción y les permite encontrar una condición que cumplen todas las tangentes (utilizando el triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente, o bien otro semejante). Construcciones de este tipo permiten que los alumnos calculen funciones derivadas sin necesidad de utilizar límites, siempre que se haya trabajado previamente la interpretación geométrica de la derivada en un punto.

Los documentos curriculares, un segundo elemento a tener en cuenta

En Font (2000a) se describe con detalle el proceso que va del significado de referencia, sobre la derivada, al significado pretendido y la concreción de este último en una unidad didáctica para dicho objeto (a lo que se denomina tercer nivel de concreción en los documentos oficiales sobre el currículum). Este significado pretendido tuvo que adaptarse a uno de los elementos que conforman el significado de referencia: el marco curricular oficial de la comunidad autónoma de Catalunya (que corresponde al 1º nivel de concreción), y a la secuenciación de contenidos, realizada siguiendo el primer nivel de concreción, del centro de enseñanza donde se tendría que aplicar (2º nivel de concreción). Los niveles 1 y 2 de concreción hay que considerarlos como elementos conformadores del significado de referencia y que constituyen una primera restricción a la cual tuvo que adaptarse el significado pretendido. Estos documentos curriculares son el resultado de realizar una selección del sistema de prácticas asociadas al objeto institucional derivada.

Es importante observar que el "significado de referencia" es un constructo que resulta difícil de delimitar ya que, en cierta manera, está implícito en todo el proceso de estudio al ser la resultante de diferentes componentes: el significado del objeto en la institución matemática universitaria, la evolución epistemológica de dicho objeto, las orientaciones curriculares, los diferentes libros de texto, los significados matemáticos y didácticos personales de los profesores de la institución. En cada investigación particular el investigador adopta criterios para delimitar el sistema de prácticas que concretan el significado de referencia pertinente a la situación tratada.

Unidades didácticas que pueden desarrollarse basadas en el análisis del significado pretendido efectuado

A partir de las consideraciones anteriores, entre otras, en Font (2000a) se describe un proceso de estudio para el objeto "derivada" que toma en consideración la complejidad semiótica que implica el paso de la derivada en un punto a la función derivada. La descripción de este proceso de estudio se desarrolla teniendo en cuenta los constructos elaborados por la TFS. En concreto se describe con detalle el proceso que va del significado de referencia al significado pretendido. También se describen el significado implementado y el evaluado. La institución es, en este caso, una clase de 1º de bachillerato de un Instituto de Educación Secundaria de la Comunidad Autónoma de Catalunya.

El significado pretendido se concretó en una unidad didáctica que tenía por objetivo que, después del proceso de instrucción, el alumno dominase las técnicas de cálculo de la función derivada que se deducen de la parte inferior de la figura 1. Para que estas prácticas resulten comprensibles a los alumnos, es necesario relacionarlas con otro sistema de prácticas que permita calcular la derivada de una función en un punto, así como con otro sistema de objetos institucionales que las justifiquen. De todo esto, se desprende la necesidad de seleccionar previamente un sistema de prácticas para calcular la derivada en un punto, que son las que se deducen de la parte superior de la Figura 1.

Con relación a las unidades didácticas habituales en la comunidad autónoma de Catalunya este significado pretendido incorpora procedimientos correspondientes a las formas 2 y 3 (ver esquema inferior de la figura 3) de introducción de la función derivada. Puesto que cualquier recta tangente en un punto de la gráfica de la función $f(x) = e^x$ cumple que la subtangente vale 1, se puede aplicar el procedimiento 2 a la función logaritmo neperiano, lo cual permite prescindir, en la unidad de límites, del estudio previo de la indeterminación 1^∞, mientras que la aplicación del procedimiento 3 a la función seno —propuesta en Tall (1992)— permite prescindir, en la unidad de trigonometría, del estudio de las fórmulas trigonométricas que convierten una diferencia de senos en un producto. Por tanto, la incorporación de estas dos técnicas, además de permitir una emergencia diferenciada del objeto función derivada, permite una organización de la unidad didáctica de derivadas que reduce considerablemente los contenidos de dos unidades (límites y trigonometría) que se han impartido previamente.

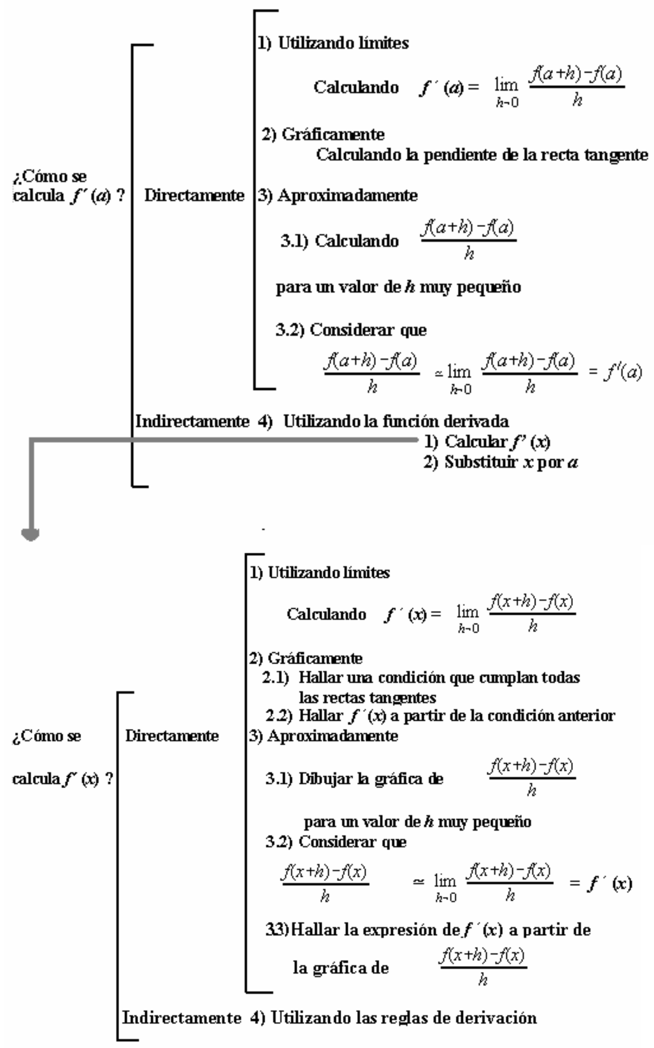


Figura 1. Técnicas de cálculo de $f'(x)$ y $f'(a)$

2.3. Experimentación de un proceso de estudio

En la experimentación del proceso de estudio descrito en Font (2000a) la trayectoria que va del significado de referencia al significado pretendido tuvo en cuenta los conocimientos previos de los alumnos, la complejidad semiótica y los conflictos semióticos potenciales; pero también la elección de actividades adaptadas a los alumnos que fuesen a la vez motivadoras para ellos, con el objetivo de conseguir una buena implicación en las tareas propuestas. Por otra parte, fue determinante la consideración de las restricciones que imponen los documentos curriculares y, sobre todo, la disponibilidad de recursos materiales y temporales puesto que se diseñó una propuesta de organización del significado pretendido que fuese viable en una institución escolar de secundaria cualquiera. La experimentación se realizó con cuatro grupos de alumnos (dos de ciencias y dos de ciencias sociales) y tres profesores de un centro de secundaria de L'Hospitalet de Llobregat, una ciudad de aproximadamente 300.000 habitantes que forma parte del cinturón industrial de Barcelona.

La gestión del proceso de instrucción por parte del profesor tuvo cuatro grandes líneas de actuación: 1) Crear un ambiente respetuoso entre profesor y alumnos que permitiese un desarrollo normal de las sesiones de clase. 2) Gestionar el ritmo de trabajo y la organización de los contenidos (marcar un ritmo de trabajo, encargar actividades para el día siguiente, explicar determinadas actividades, realizar esquemas para organizar los contenidos, decidir cuándo utilizar el ordenador, poner las fechas de examen, etc.) 3) Dirigir el proceso de construcción del significado personal de los alumnos (interpretar sus producciones, cuál era su actitud, las preguntas que hacían o bien la falta de preguntas, las dificultades que podían tener, hacer explicaciones individuales o bien a todo el grupo, animar a determinados alumnos, etc.). 4) Evaluar el proceso de construcción del significado personal de los alumnos.

Se diseñaron tres tipos de evaluación: 1) evaluación inicial, 2) evaluación sumativa encaminada a poner una nota y 3) evaluación formativa. El segundo tipo de evaluación era el normal en la institución estudiada y consistía en poner la nota media de los exámenes realizados, los cuales se anunciaban con bastante antelación y se corregían en clase. El primer y tercer tipo de evaluación no eran habituales en la institución estudiada. Estos dos tipos de evaluación siguieron las normas siguientes: 1) El profesor podía pasar un cuestionario sin previo aviso. 2) este cuestionario se tenía que responder individualmente (excepto cuando explícitamente se decía que se respondiese en grupo). 3) El alumno tenía que intentar responder el cuestionario porque los resultados eran importantes de cara a tomar decisiones sobre la marcha del grupo-clase (por ejemplo, según los resultados podría ser necesario repasar algún tema de cursos anteriores). 4) Sus respuestas no tendrían influencia sobre la nota individual (el objetivo era que sus respuestas reflejaran lo que realmente sabían sin que intentaran copiar).

La gestión de la clase correspondió al contrato habitual en la institución estudiada, si exceptuamos la novedad de los cuestionarios que se tenían que contestar sin previo aviso. Algunas de las preguntas de estos cuestionarios tenían un cierto paralelismo con la devolución a los alumnos de una situación adidáctica. Se trata de actividades en la que el alumno ha de actuar, reflexionar y responder contando únicamente con él mismo, sin ninguna intervención del profesor, ya que desde que el alumno acepta el problema como suyo hasta el momento de la respuesta no hay ninguna intervención del profesor y, en algunos casos, el conocimiento que ha de construir el alumno para responder es un conocimiento nuevo, o bien ha de utilizar un conocimiento que no es nuevo en un contexto que sí lo es.

Las tareas explícitas de los estudiantes se pueden resumir en las obligaciones siguientes: 1) Asistir a clase con el material necesario. 2) Intentar responder a las actividades, solo o bien conjuntamente con los compañeros. 3) Intentar contestar las actividades encargadas, de un día para otro, por el profesor. 4) Confeccionar unos apuntes con las respuestas de las actividades propuestas y presentarse a los exámenes. 5) Salir a la pizarra a indicación del profesor. 6) Intentar contestar les preguntes de los cuestionarios. 7) Tener un comportamiento respetuoso con el profesor y sus compañeros.

Para el profesor las tareas fueron las siguientes: 1) Facilitar a los alumnos fotocopias de la unidad "Introducción a las derivadas". 2) Tener un comportamiento respetuoso hacia los alumnos. 3) Encargar las actividades que se tenían que responder, tanto en el aula como fuera del aula. 5) Contestar las preguntas y resolver las dudas de los alumnos. 6) gestionar el trabajo en el aula: decidir cuándo y a quien se pregunta, el tiempo dedicado a cada actividad, cuándo conviene hacer una explicación general, etc. 7) Planificar con tiempo la fecha de los exámenes y corregirlos en el aula explicitando las puntuaciones y los criterios de corrección. 8) Proponer unos exámenes adecuados a los contenidos impartidos. 9) gestionar el control de faltes de asistencia. 10) Pasar cuestionarios cuando lo considerase conveniente y sin previo aviso.

Se elaboraron 84 ítems que, de acuerdo con la terminología del currículum oficial, se redactaron como objetivos a conseguir en el proceso de estudio. A modo de ejemplo, siguen los nueve ítems del apartado "Derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas":

64. Conocer que todas las rectas tangentes a la función $f(x) = e^x$ presentan una determinada propiedad (todas las subtangentes valen 1).

65. Para $f(x) = e^x$ calcular, utilizando la interpretación geométrica de la derivada, $f'(a)$ de la siguiente forma: $f'(a) = e^a/1 = e^a$. Y, teniendo en cuenta que este razonamiento es válido para cualquier valor de la abscisa, deducir que $f'(x) = e^x$.

66. Conocer que las funciones exponencial y logarítmica son inversas una de la otra y conocer también la relación que hay entre sus gráficas.

67. Entender, dado que la función $f(x) = \ln x$ es la inversa de la función $g(x) = e^x$, que todas las tangentes a la función $f(x)=\ln x$ cumplen también una determinada propiedad, que es consecuencia de que todas las subtangentes de la función $g(x) = e^x$ valen 1.

68. Para $f(x) = \ln x$ calcular, utilizando la interpretación geométrica de la derivada, $f'(a)$ de la siguiente forma: $f'(a) = 1/a$. Y, teniendo en cuenta que este razonamiento es válido para cualquier valor de la abscisa, deducir que $f'(x) = 1/x$.

69. Calcular, utilizando la fórmula del cambio de base y las reglas de derivación, la derivada de la función $f(x) = \log_a x$.

70. Conocer que una de les propiedades de la función exponencial de base a es que, para cualquier punto de la gráfica de la función, la subtangente siempre vale el mismo número k.

71. Para $f(x) = a^x$ calcular f'(c) utilizando la interpretación geométrica de la derivada de la siguiente forma: $f'(c) = a^c/k$. Y, teniendo en cuenta que este razonamiento es válido para cualquier valor c de la abscisa, deducir que $f'(x) = a^x/k$..

72. Conocer que, para poder tener completamente determinada la derivada de la función exponencial de base a, sólo es necesario saber el valor de k. Y que este valor se puede calcular utilizando que la función exponencial de base a tiene por inversa la función $f(x) = \log_a x$, la derivada de la cual ya se conoce.

La investigación se dividió en tres fases. La primera corresponde al período anterior a la implementación del proceso de estudio sobre la derivada, la segunda al proceso propiamente dicho y la tercera a la fase posterior a dicho proceso.

En la primera fase se investigaron los conocimientos previos de los sujetos. En primer lugar, a partir de sus respuestas a los exámenes, los significados personales de los alumnos sobre límites y continuidad de funciones, que era la unidad que estudiaron previamente a la de derivadas. En segundo lugar**,** se pasaron dos cuestionarios sobre funciones, en especial para determinar su competencia en obtener expresiones simbólicas de funciones elementales a partir de gráficas.

Los alumnos tenían a la semana 3 horas en las que asistía al aula todo el grupo y una hora semanal en la que sólo asistía la mitad del grupo. Si bien el profesor tenía 4 horas de clase a la semana con los alumnos, cada alumno tenía tres horas a la semana y una cuarta hora cada dos semanas. En esta cuarta hora no se podía avanzar materia y, por tanto, se tenía que dedicar a evaluación o bien a reforzar los contenidos ya impartidos en las otras tres horas.

En la segunda fase se puso en práctica la experimentación del significado pretendido. Dicha experimentación se dividió en dos subsecuencias de actividades: de clase normal (25 sesiones) y de evaluación (12 sesiones). En la subsecuencia de evaluación se pasaron cuatro cuestionarios en las horas en las que sólo asistía la mitad del grupo (8 sesiones en total, la mayor parte de la sesión se dedicaba a responder un cuestionario y otra parte a comentar las respuestas) y dos exámenes en las horas en las que asistía todo el grupo (4 sesiones en total, dos de examen y dos de corrección en la pizarra). Los instrumentos de observación en las sesiones de clase normal fueron el diario de clase y la grabación de la sesión. Para las sesiones de evaluación, los instrumentos fueron el diario de clase, la grabación de la sesión y las respuestas escritas de los alumnos.

En la tercera fase se pasó un nuevo cuestionario y se realizó el examen de recuperación para los alumnos que habían suspendido. También se volvió a pasar uno de los dos cuestionarios pasados en la primera fase cuyo objetivo era obtener expresiones simbólicas de funciones elementales a partir de gráficas.

La experimentación se realizó con cuatro grupos de alumnos (dos de ciencias y dos de ciencias sociales) y tres profesores pero, dado el gran número de producciones de alumnos y de horas de grabación, en Font (2000a) sólo se describe con detalle el proceso de estudio de uno de los dos grupos de ciencias, formado por 41 alumnos. Se analizaron de 13 a 14 producciones de cada alumno con un total de 526.

Con relación al tipo de actividades, los alumnos realizaron actividades con ordenador, actividades individuales (respuesta a cuestionarios o exámenes), actividades en pareja (respuesta a cuestionarios), actividades de clase normal en las que el profesor explicaba y proponía problemas que los alumnos podían responder individualmente o bien consultando con los compañeros que tenían a su alrededor y, por último, actividades, que tenían que hacer por su cuenta fuera del horario de clase. Por ejemplo, para los ítems de la derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas comentados anteriormente, el n.º 64 se analizó a partir de observar la respuesta de los alumnos a un cuestionario sobre una actividad realizada por parejas en el aula de informática con el graficador *Calcula* (casi todos los alumnos hallaron el siguiente invariante: todas las subtangentes de la función $f(x) = e^x$ tienen una longitud igual a 1). En cambio, el ítem

65 se analizó, entre otros instrumentos, a partir de las respuestas individuales de los alumnos al siguiente cuestionario, propuesto antes de explicar en clase cómo se calcula la derivada de las funciones exponenciales y después de que ellos hubieran comprobado con el ordenador la propiedad anterior:

Cuestionario 6

En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

a) Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$

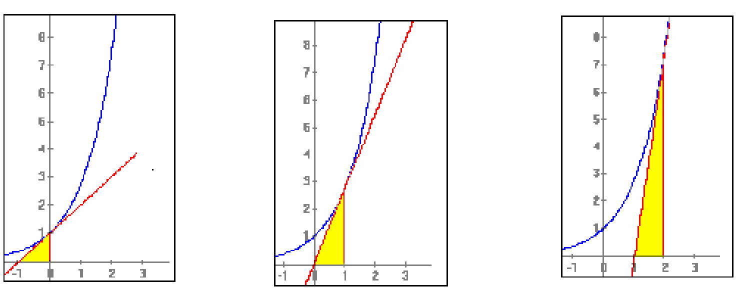


Figura 2

b) Calcula $f'(a)$

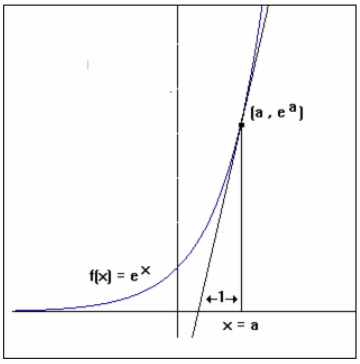


Figura 3

c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f'(x) = e^x$.

La mitad de los alumnos contestó de manera aceptable la respuesta al apartado *c.* A continuación sigue una de estas respuestas:

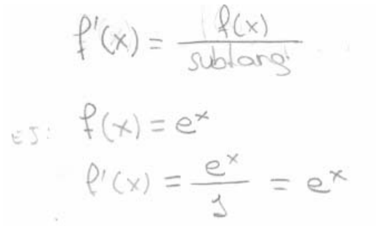


Figura 4

La descripción del proceso de estudio, realizada en forma de crónica y de manera exhaustiva, muestra por una parte la complejidad del proceso de instrucción cuando se trata de estudiar y enseñar el objeto "derivada" y, por otra parte, permite llegar a conclusiones importantes, entre las que destacamos algunas:

- La consideración conjunta de la complejidad semiótica, los conflictos semióticos potenciales y la necesidad de actividades que partan de los conocimientos previos de los alumnos, lleva a proponer significados pretendidos que se concretan en unidades didácticas cuya implementación necesita muchos recursos temporales. Por este motivo, resulta difícil compaginarlas con las restricciones materiales y temporales reales.
- El significado personal de objetos que se suponía que los alumnos habían estudiado previamente (función, variación de una función, pendiente, tasa media de variación, velocidad, etc.) era insuficiente. De aquí se deduce que una buena manera de asegurar que los alumnos adquieren un buen significado personal del objeto derivada consiste en conseguir un buen significado personal de dichos objetos previos.
- La definición de la función derivada como límite de las tasas medias de variación presenta una gran complejidad semiótica.
- El hecho de diseñar un significado pretendido que incorporaba prácticas que permitían calcular la expresión simbólica de funciones derivadas a partir de gráficas (de $f(x)$ o de $f\,'(x)$), modificó los significados de los objetos personales "funciones elementales" de los alumnos. Al finalizar el proceso de estudio, el significado personal de la mayoría de alumnos incorporaba prácticas que permitían obtener expresiones simbólicas de funciones elementales a partir de sus gráficas. Dichas prácticas no formaban parte del significado de sus objetos personales "funciones elementales" antes del proceso de instrucción, ni habían sido explícitamente contempladas en el diseño previo del significado pretendido.

3. ANÁLISIS ONTOLÓGICO-SEMIÓTICO DE LA DERIVADA

La emergencia de la función derivada y de la derivada en un punto como objetos diferentes, un elemento relevante del análisis didáctico

El conjunto de prácticas que permiten calcular la derivada en un punto y la función derivada descrito en la figura 1 también se utilizó en una investigación posterior (Inglada y Font 2003) que tenía por objetivo determinar el significado institucional pretendido para la derivada en los libros de texto de bachillerato de la comunidad autónoma de Catalunya.

Después de un análisis de los libros de texto, se concluye que la "pobreza" de técnicas utilizadas para calcular $f'(a)$ y $f'(x)$ no permite la emergencia de estos dos objetos como objetos claramente diferenciados, y, además, se infiere que, en general, o bien los autores no son conscientes de la gran complejidad semiótica que conlleva el paso de la derivada en un punto a la función derivada, o bien no le prestan la atención que se merece.

En Inglada y Font (2003) se describe cómo en alguno de los manuales de matemáticas de bachillerato de la Comunidad Autónoma de Cataluña, determinados usos de la notación $\Delta y/\Delta x$ (en la clase de matemáticas o bien en la de física) pueden presentar más inconvenientes que ventajas cuando se toma en consideración la complejidad semiótica asociada al paso de la derivada en un punto a la función derivada. Según esta investigación, determinadas maneras de introducir la notación incremental y la diferencial ponen las bases de un *conflicto semiótico causado por la introducción implícita de la función derivada en la definición de la derivada en un punto*. Es decir, ciertos usos de la notación incremental implican definir la derivada en un punto $f'(a)$ como: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ en $x = a$ sin haber definido antes la función derivada.

Uno de los aspectos relevantes para la didáctica del análisis matemático que han permitido detectar las investigaciones anteriormente citadas (Font 2000a, Inglada y Font 2003) realizadas en el marco de la TFS es el siguiente fenómeno didáctico[4]: la regularidad

[4] Otra investigación que corrobora este fenómeno es la realizada por Badillo (2003) con profesores colombianos, en la cual se documenta que dicho fenómeno en Colombia no se limita a los alumnos sino que es de mayor magnitud ya que en muchos casos son los propios profesores los que confunden la derivada en un punto y la función derivada.

con la que se manifiestan conflictos semióticos en las prácticas de los alumnos de bachillerato cuando han de distinguir la derivada en un punto y la función derivada. Además, por otra parte, dichas investigaciones permiten inferir que la causa que lo produce está relacionada con el hecho de que el paso de la derivada en un punto a la función derivada presenta una gran complejidad semiótica, y que las unidades didácticas que se proponen en el nivel de bachillerato español no la tienen en cuenta.

Por una parte, la observación empírica de la confusión que tienen muchos alumnos entre la derivada en un punto y la función derivada dirigió el análisis semiótico hacia dicho fenómeno. Por otra parte, el análisis semiótico, además de permitir explicar las causas de dicho fenómeno, puso de manifiesto la magnitud que podía llegar a tener y de esta manera dirigir investigaciones posteriores como la comentada anteriormente (Badillo 2003).

3.1. Análisis ontológico-semiótico de la derivada

Un ejemplo que pone de manifiesto dicha complejidad semiótica se puede observar en el texto siguiente (previamente se había definido la derivada de la función en un punto), que aparece en uno de los manuales al uso, en 1º de bachillerato, dirigido a estudiantes de 16-17 años:

> « 1. Función derivada de una función.
> Consideremos ahora, dada una función $y = f(x)$, otra función nueva que asocia a cada punto a del dominio de f su derivada $f'(a)$ cuando exista. Esta función es la función derivada de $y = f(x)$ y se representa con $f'(x)$ o y'.
> $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ »

Un análisis previo, utilizando las funciones semióticas descritas en la tabla 1, nos conduce a la hipótesis de que la trama de funciones semióticas, que tiene que poner en funcionamiento un alumno hipotético, es la de la figura 5.

FS3.1: Esta función semiótica indica que, de la clase de todas las funciones, se considera una función concreta $y = f(x)$; FS2.2: Relaciona un objeto (la función) con una clase a la cual no pertenece (su dominio); FS3.1: Relaciona la clase (el dominio) con un elemento de dicha clase (el valor a); FS1.2: Relaciona un extensivo (a) con otro ($f'(a)$); FS2.1: Relaciona el par (a , $f'(a)$) con la clase de los pares (a , $f'(a)$); FS3.2: Relaciona la clase de pares (a, $f'(a)$) con el objeto función derivada; FS1.2: Es una función semiótica de tipo representacional que relaciona el extensivo función derivada con el extensivo *y';* FS1.2: Es una función semiótica de tipo representacional que relaciona el extensivo *y'* con otro extensivo *f'(x)*.

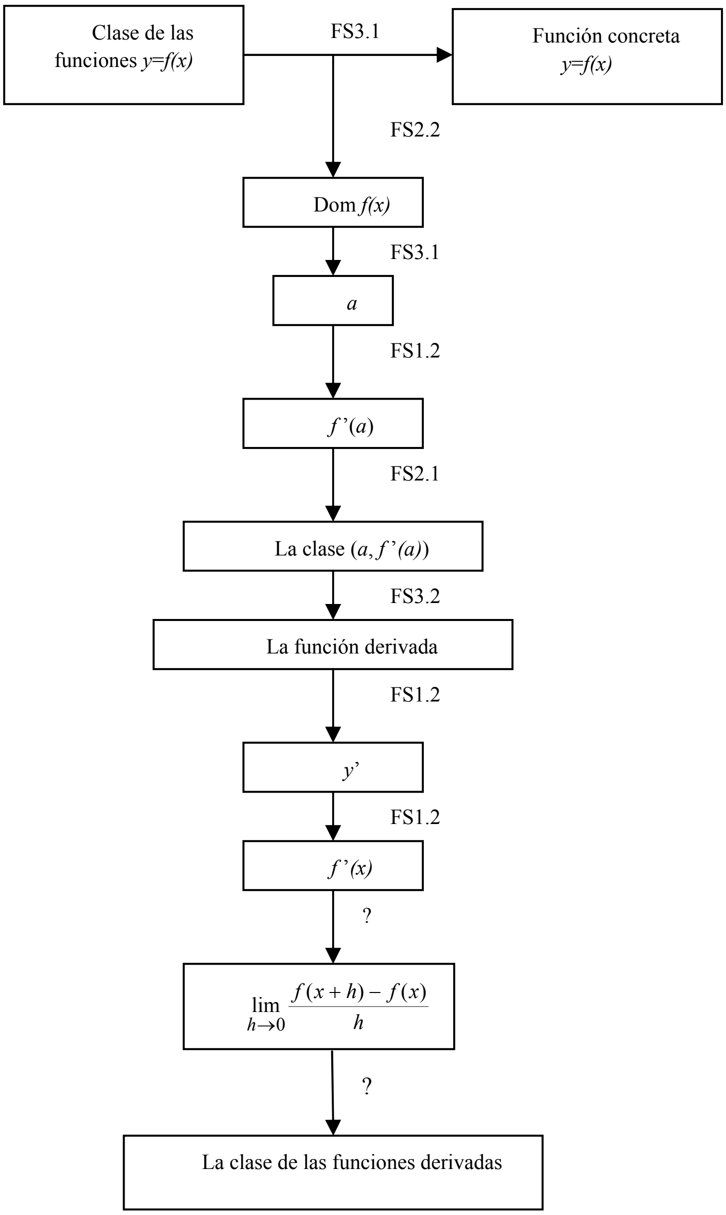


Figura 5. Trama de funciones semióticas

Como podemos observar en la figura 5, el análisis a priori con funciones semióticas nos muestra las dos últimas, representadas con un interrogante, que no son propiciadas explícitamente por el autor del texto. Por una parte, se deja a cargo del alumno la última función semiótica que permite entender la función derivada como un objeto conceptual intensivo. En efecto, dicha función —que es del tipo FS2.1, ya que el alumno tiene que entender que la función derivada obtenida a partir de la función $y = f(x)$ es un miembro de la clase de las funciones derivadas—, puede conducirle a un conflicto semiótico potencial (Contreras, 2001), aunque el texto posteriormente proponga actividades que permiten superar dicho conflicto.

Más grave aún nos parece dejar bajo la responsabilidad del alumno la penúltima función semiótica que permite la interpretación de $f'(x)$ como $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, ya que esta última, a nuestro entender, sólo se podría efectuar si el alumno ha completado la trama anterior con las funciones semióticas que aparecen, posteriormente, en la figura 6 (señaladas con asteriscos en la figura 6).

FS1.2*: De tipo representacional y relaciona un extensivo con otro extensivo; FS2.1**: Relaciona un elemento con la clase a la que pertenece.

Si bien el autor del texto analizado no ha diseñado ninguna secuencia de actividades para prevenir este conflicto semiótico potencial, es de destacar que hay otros autores que sí son conscientes de ello. Hay manuales, correspondientes al mismo curso, que, después de haber definido la derivada en un punto como un límite y antes de pasar a definir la función derivada como un límite, diseñan una secuencia didáctica que trata de facilitar la comprensión del par $(a, f'(a))$ como elemento de una clase —caso de la función $f(x) = x^2$, por ejemplo—, la cual se puede entender como una función, llamada función derivada, que permite para cada valor hallar su derivada. Esta nueva función es útil para ahorrar el cálculo de $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para cada valor a puesto que es posible obtenerlo por otro método. Esta secuencia facilita al alumno comprender que la imagen $f'(x)$ nos permite obtener el límite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y, por tanto, facilita la asociación de la expresión $f'(x)$ con el contenido $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

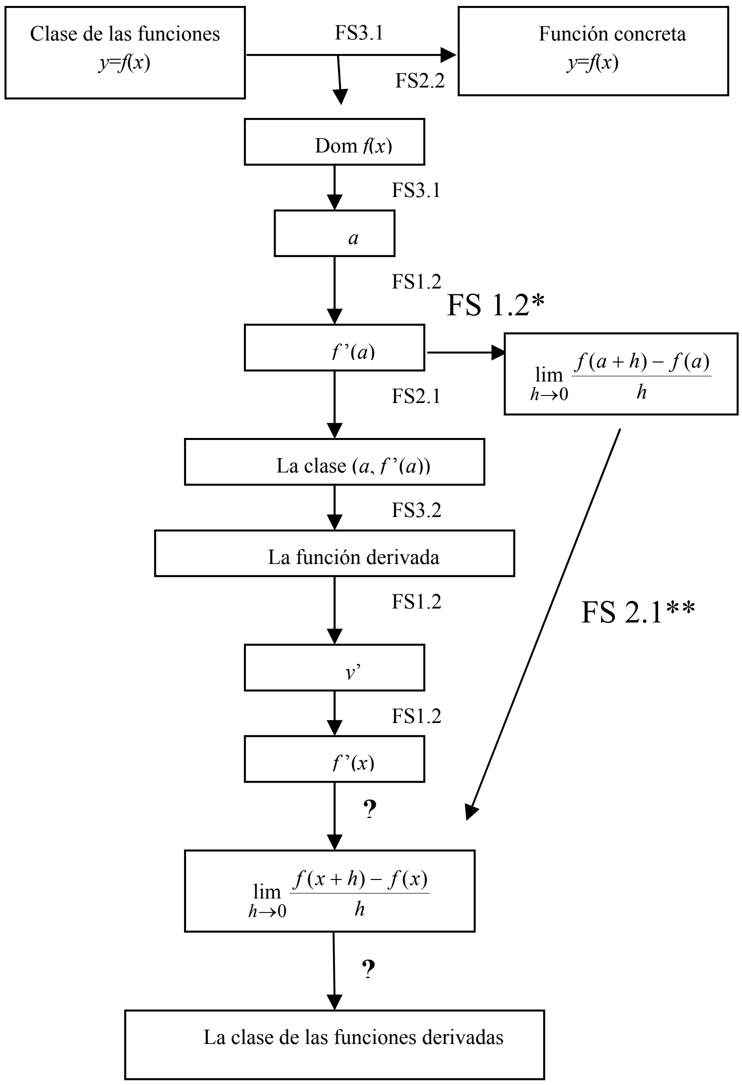


Figura 6. Trama de funciones semióticas ampliada

3.2. La dualidad intensivo/extensivo en el uso de elementos genéricos

Si bien el análisis semiótico que acabamos de realizar es a priori y sirve para detectar conflictos semióticos hipotéticos, queremos destacar que la introducción de la faceta extensivo/intensivo en la TFS y de las 8 funciones semióticas que hemos utilizado en su descripción detallada no se pueden desligar de la reflexión que hemos hecho sobre uno de los elementos cruciales de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos y de la observación de episodios de aula en los que se fijan sus reglas de uso.

El razonamiento matemático, para ir de lo general a lo general, hace intervenir una fase intermedia que consiste en la contemplación de un objeto individual. Este hecho plantea un grave dilema: si el razonamiento se ha de aplicar a un objeto concreto (por ejemplo un triángulo), es preciso que se tenga alguna garantía de que se razona sobre un objeto cualquiera para que quepa justificar la generalización en la que termina el razonamiento.

Ahora bien, en nuestra opinión, con relación al elemento genérico hay que considerar tres cuestiones conexas pero distintas, a saber:

1) ¿Por qué se hace intervenir en la demostración de una proposición matemática (el enunciado de una definición, etc.), una fase intermedia que se refiere a un objeto particular?
2) ¿Cómo es posible que un razonamiento en que intervenga semejante fase intermedia pueda, pese a ello, dar lugar a una conclusión universal?
3) El elemento particular normalmente forma parte de una cadena en la que los eslabones anteriores son elementos genéricos. A su vez, el elemento particular al ser considerado como genérico se convertirá en el eslabón previo de un nuevo caso particular y así sucesivamente.

Con respecto a la primera cuestión, se pueden dar soluciones diferentes, como por ejemplo la que propone Descartes: es necesario considerar un objeto concreto para que la intuición, que no puede referirse sino a objetos particulares, pueda actuar. Ahora bien, en este trabajo no se pretende responder a esta cuestión, sólo afirmamos que cuando, en la definición de derivada analizada en el apartado anterior, se dice *"dada una función $y = f(x)$"*, hay que tener en cuenta que el autor del texto pretende dar la definición de la función derivada de cualquier función. Para ello, lo primero que hace es dirigir la atención del alumno a "una función", es decir, se pasa de lo general a lo particular y, por tanto, se ha introducido un objeto particular mediante una función semiótica intensivo/extensivo (una F3.1). Si la función es un caso particular (un extensivo) también lo es su dominio (un conjunto particular).

También consideramos que para que un alumno pueda comprender la definición de derivada del libro de texto, tiene que tener la capacidad de entender que el dominio, por una parte, es "un" conjunto (un extensivo) y por otra parte es un conjunto formado por "diferentes valores" (un intensivo). También suponemos que el alumno entiende la relación entre el todo y las partes para progresar en la comprensión de la definición de derivada del libro de texto. Este proceso lo hemos sintetizado en la FS 2.2, aunque se podría precisar más y suponer que previamente hay una FS1.2 que relaciona una función particular (un extensivo) con otro objeto particular: su dominio (otro objeto particular pero diferente). Nos hemos limitado a poner la FS2.2 en el esquema porque es la que nos parece más relevante.

Cuando en la definición se dice *"...que asocia a cada punto a del dominio de f..."* consideramos también que se vuelve a producir el fenómeno comentado anteriormente: la necesidad de introducir en el razonamiento matemático una fase intermedia que consiste en la contemplación de un objeto particular, por este motivo hemos considerado una función semiótica del tipo FS 3.1.

Cuando en la definición se dice *"....que asocia a cada punto a del dominio de f su derivada f '(a) cuando exista."*, a un valor concreto *a* se le hace corresponder otro valor concreto $f\,'(a)$. Por tanto, hemos considerado una función semiótica del tipo FS 1.2.

Hasta ahora las funciones semióticas comentadas tratan fundamentalmente sobre la introducción del elemento concreto en el razonamiento matemático. A partir de ahora aparece el segundo aspecto que hemos comentado: ¿Cómo es posible que un razonamiento en el que interviene semejante fase intermedia pueda, pese a ello, dar lugar a una conclusión universal?

Con relación a esta segunda cuestión, la TFS tiene una posición clara, aunque demasiado general: actuamos sobre un objeto particular pero nos situamos en un "juego de lenguaje" en el que se considera que, cuando nos referimos a este objeto particular, se entiende que nos interesan sus características generales y que prescindimos de los aspectos particulares. Esta afirmación resulta demasiado general, ya que no da detalles sobre las características de este juego del lenguaje y de las dificultades que tienen los alumnos para participar en él.

El análisis de diálogos entre profesores y alumnos extraídos de diferentes procesos de estudio nos ha permitido detectar algunas de las características de dicho juego de lenguaje. A continuación siguen dos diálogos en los que cada profesor explica a sus alumnos las reglas que rigen el uso del ejemplo genérico.

Diálogo 1

En este diálogo la profesora propone a los alumnos que resuelvan la siguiente actividad de su libro de texto:

Ejercicio 14: Dada la función $f(x) = ax+ b$, demuestra que $f\ '(x_0)=a$, independientemente del valor x_0 considerado.

Esta actividad se propone justo después de que la profesora haya explicado en clase un párrafo del libro de texto en el que se justifica que la derivada de la función constante $f(x) = k$ *es* $f\ '(x) = 0$ primero gráficamente, razonando sobre la pendiente de la recta tangente en un punto cualquiera de la recta, y después calculando el límite de las tasas de variación media:

> *Profesora*: Lo vais a hacer de dos formas diferentes: gráficamente y utilizando límites. ¿De acuerdo? Venga, y después sale alguien a la pizarra a corregirlo. Mientras os voy repartiendo más material que después haremos servir, eh!, y así ya lo tenéis
> *Alumno(Iván)*: Pero gráficamente, podemos... Eso es un ejemplo, si lo representamos gráficamente es un ejemplo...
> *Profesora*: (mientras hace gestos con la cabeza de que lo que dice el alumno es correcto y se acerca hacia él). Sí, Correcto!
> *Iván:* Y dice que x cero se considera...
> *Profesora:* Sí, pero Iván, para poderlo justificar coges un punto cualquiera de esta recta, cualquiera, y lo haces, y como esto lo podrías hacer con cualquier punto y con cualquier recta, sirve par justificarlo. ¿De acuerdo? Pero tienes razón, claro, para poderlo dibujar has de escoger un punto concreto y una recta concreta (mientras habla la profesora va repartiendo hojas a los alumnos).

Diálogo 2

Después de que el profesor haya introducido en clases anteriores la derivada en un punto como $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ y justo después de haber introducido la función derivada como $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ se produjo el siguiente diálogo:

> *Alumna (Laura)*: ¿Qué diferencia hay entre la definición de función derivada y la definición de derivada en un punto?.
> *Profesor*: La derivada en un punto es $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, en esta expresión la a es fija, no varia, lo que varia es la h. En cambio, en el caso de la función derivada $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, primero has de suponer que la x no varia y que sólo varia la h para obtener $f\ '(x)$, y después has de suponer que la x varia. Por tanto, cuando calculas la

derivada en un punto el resultado es un número, mientras que cuando calculas la función derivada, el resultado es una fórmula de una función.

Consideremos finalmente la producción de la alumna (figura 8) que muestra cómo dicha alumna es consciente de las reglas de uso del elemento genérico ya que las toma en cuenta en su respuesta al cálculo de la función derivada.

Producción alumna

A los alumnos se les había propuesto la siguiente tarea que tenían que realizar utilizando el programa *Cabri*: A partir de la construcción propuesta (ver figura 7) los alumnos tenían que concluir primero que la traza que resultaba de mover el punto *P* era la parábola $f(x) = x^2$ y que la recta *PG* era la recta tangente a esta función en el punto *P*. También tenían que descubrir un invariante del tipo: en la parábola $f(x) = x^2$ la recta tangente en *P* corta al eje de ordenadas en un punto tal que la longitud del segmento que tiene por extremos este punto y el origen de coordenadas es la ordenada de *P*.

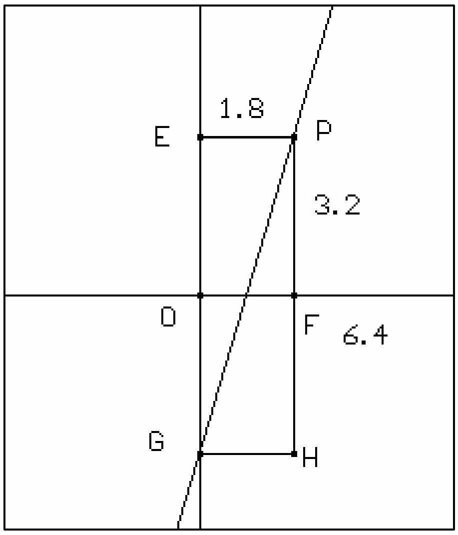


Figura 7

A continuación se les pidió que utilizaran esta propiedad para contestar la siguiente actividad:

Actividad

a) Si $OF = a$, justifica que $GH = a$, $PF = a^2$ i $PH = 2a^2$:

b) Utilizando que la derivada de la función en un punto es la pendiente de la recta tangente, calcula $f'(a)$.

c) Demuestra que la derivada de la función $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$.

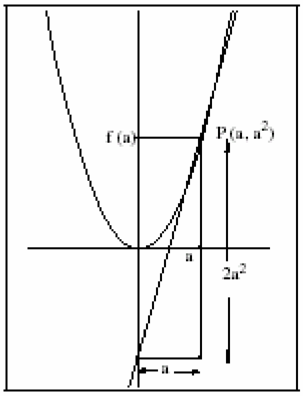
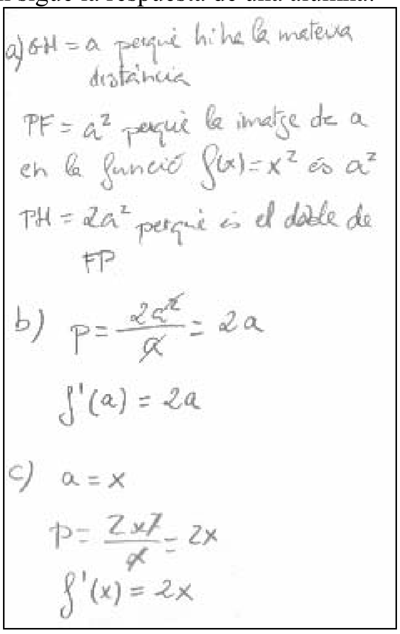


Figura 8

A continuación sigue la respuesta de una alumna:



a) $GH = a$ perquè hi ha la mateixa distància

$PF = a^2$ perquè la imatge de a en la funció $f(x) = x^2$ és a^2

$PH = 2a^2$ perquè és el doble de FP

b) $p = \frac{2a^{\cancel{2}}}{\cancel{a}} = 2a$

$f'(a) = 2a$

c) $a = x$

$p = \frac{2x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = 2x$

$f'(x) = 2x$

Figura 9

La respuesta de la alumna es:

"*a*) $GH = a$ porque hay la misma distancia

$PF = a^2$ porque la imagen de a en la función $f(x) = x^2$ es a^2

$PH = 2a^2$ porque es el doble de FP."
Observemos que, con la letra "p" minúscula, la alumna indica la pendiente de la recta tangente.

Vemos pues que, en la respuesta del apartado c), la igualdad "$a = x$" está expresando que el razonamiento de los apartados a) y b) son válidos para cualquier valor de a. Esto indica que la alumna ha entrado en el juego de lenguaje que regula el uso de elementos genéricos.

Si consideramos nuevamente la definición de derivada que estamos analizando, conviene destacar que la frase *"otra función nueva que asocia a cada punto a del dominio de f su derivada f '(a) cuando exista"* nos sitúa directamente en el segundo aspecto que hemos comentado anteriormente: lo que se ha dicho para el caso particular es válido para cualquier otro caso particular. El alumno ha de entender, primero, que lo que se hace con un valor concreto del dominio se puede hacer con todos los valores del mismo (una FS 2.1, ya que pasamos del caso particular al general) y después ha de entender que la clase de pares $(a, f'(a))$ se puede considerar un objeto particular, una nueva función (una FS 3.2).

Cuando en la definición se dice: *"Esta función es la función derivada de y = f(x) y se representa con f ' (x) o y'."* Tenemos diferentes maneras de representar el mismo objeto. Las representaciones por una parte son diferentes, lo cual justifica utilizar la función semiótica FS1.2 que relaciona un extensivo con otro extensivo diferente. Pero, por otra parte son representaciones del mismo objeto. El hecho de que las representaciones por una parte son diferentes y por la otra se pueden considerar iguales es un argumento de suficiente entidad que ha llevado a la TFS a realizar análisis más finos con 18 funciones semióticas en lugar de las 8 que se utilizan en este artículo (se pueden encontrar este tipo de análisis más detallado en Font, (2000b), Contreras y Font (2002) e Inglada y Font (2003)).

Cuando en la definición se introduce la siguiente expresión $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ entramos de lleno en el tercer aspecto que hemos comentado anteriormente, puesto que tanto la x como la h son elementos genéricos. Las funciones semióticas que proponemos para la correcta comprensión de esta expresión por parte del alumno han sido sugeridas por el análisis de los diálogos reales grabados en video en diferentes clases (ver diálogos 1 y 2 anteriores). En dichos diálogos los profesores afrontan el problema de la presencia simultanea de varios genéricos introduciendo fases diferentes: primero hay que considerar como genérico uno sólo de los que intervienen y después hay que pasar a considerar como genérico el que se había considerado como no genérico.

En el análisis semiótico que realizamos, por una parte tenemos en cuenta los diálogos anteriores, y, por la otra, suponemos que el alumno ya ha estudiado la derivada en un punto. Por este motivo, proponemos primero la función semiótica FS 1.2* de tipo representacional que relaciona el objeto $f\,'(a)$ con el objeto que representa $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, y también suponemos que sabe que h es genérico, es decir que el alumno establece sin dificultad una función semiótica que relaciona el número $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ con la clase de las tasas de variación media $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ cuando $h \to 0$ (este paso no aparece en las dos tramas de funciones semióticas debido a que, como ya se ha dicho, suponemos que el alumno ya entiende la definición de derivada en un punto cuando se enfrenta al texto analizado). A continuación, tiene que considerar el valor a como genérico, es decir tiene que realizar la función semiótica FS2.1** que relaciona un elemento con la clase a la que pertenece. Por último, el alumno tiene que entender que la función derivada obtenida a partir de la función $y = f(x)$ es un miembro de la clase de las funciones derivadas (tiene que realizar una FS 2.1)

4. CONCLUSIONES

Son bien conocidas las dificultades que tienen los estudiantes de bachillerato en el aprendizaje de los objetos matemáticos básicos del análisis matemático, como han puesto de manifiesto diversas investigaciones del AMT (Avanced Mathematical Thinking). Por otra parte, investigadores como Artigue (1998) se han preocupado por poner de relieve el vacío que se observa entre las técnicas de la institución secundaria y las construcciones teóricas de cursos superiores, el cual conduce al fracaso académico a muchos estudiantes, al verse éstos incapaces de construir "tecnologías" adecuadas – en el sentido de la teoría antropológica de lo didáctico.

Siguiendo esta línea de argumentación, se plantea en este trabajo la aplicación de la teoría de las funciones semióticas a la investigación de los procesos de la enseñanza de los objetos del análisis infinitesimal en el nivel de bachillerato, la cual puede poner de relieve elementos de interacción, en el aula y en los textos, entre los agentes participantes en la actividad matemática. Es decir, dado que los objetos personales emergen a partir de los discursos y de las prácticas en el aula, la TFS permite —por medio de los análisis ontosemióticos que efectúa— poner de manifiesto, por ejemplo, la dimensión intensiva o extensiva de una determinado objeto matemático, lo cual, al menos (y ya es mucho), puede informarnos sobre la dificultad inherente tanto del contenido matemático como de la faceta de comunicación.

A lo largo del trabajo, se ha podido observar cómo la aplicación de la TFS ha permitido detectar un fenómeno didáctico relevante relacionado con el objeto derivada: por una parte, la regularidad con la que se manifiestan conflictos semióticos en las prácticas de los alumnos de bachillerato cuando han de distinguir la derivada en un punto de la función derivada, y, por otra parte, la poca importancia que se da a la complejidad semiótica que implica el paso de la derivada en un punto a la función derivada en las unidades didácticas que se proponen en el nivel de bachillerato español y que, evidentemente, tiene una influencia importante en lo anterior.

Los análisis ontológico-semióticos como el que aquí hemos realizado sobre la derivada (y, especialmente, el uso de la dualidad intensivo/extensivo para el análisis del uso de los elementos genéricos) son análisis finos que consideramos que han de ser complementarios de otros análisis más gruesos. Si se realiza un estudio sobre las técnicas de derivación, su campo de aplicación, sus modificaciones, etc. pero no se realiza este tipo de análisis ontológico-semiótico más fino, se corre el peligro de "ver" el cálculo de la función derivada sólo como una ligera modificación de la técnica usada para calcular la derivada en un punto.

Otra de las ventajas que queremos destacar del uso de las funciones semióticas sobre la didáctica del análisis matemático es que permite describir, con un lenguaje unificado, muchos de los procesos que se han estudiado en el campo del pensamiento matemático avanzado (Font, 2000b).

Por último, la aplicación de la TFS a la didáctica del análisis matemático tiene ciertas limitaciones que es necesario señalar. Se trata de una herramienta de tipo descriptivo y explicativo que sirve para poner en evidencia relaciones y conflictos semióticos. Sin embargo, consideramos necesario desarrollar nuevas nociones teóricas, coherentes con este enfoque ontosemiótico, que permitan estudiar las interacciones en el aula y orientaren el diseño de situaciones que ayuden a superar los conflictos semióticos.

BIBLIOGRAFÍA

ACEVEDO, I.J. ; FONT, V. ; GIMÉNEZ, J. (2004) Class Phenomena related with the use of metaphors, the case of the graph of functions. In Giménez,, J, Fitzsimons,G, Hahn,C (ed) *Globalisation and mathematics Education*. *CIEAEM 54* (pp. 336-342). Barcelona: Graó

ARTIGUE, M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 18(2), pp. 231-262.

BADILLO, E. (2003), *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemáticas en ejercicio en Colombia*. Universitat Autònoma de Barcelona: Barcelona. [URL:http://www.tdx.cesca.es/TESIS_UAB/ VAILABLE/ TDX-0611104-144929/]

CONTRERAS, A. (2001), El límite en el bachillerato y primer año de Universidad. Perspectivas desde los enfoques epistemológico y semiótico, *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Huesca (Boletín nº 12), pp. 1-32. [URL: http://www.ugr.es/~jgodino/ siidm/boletin12.htm]

CONTRERAS, A.; FONT, V. (2002), ¿Se aprende por medio de los cambios entre los sistemas de representación semiótica?, *XVIII Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Castellón (Boletín nº 14), pp. 1-21. [URL: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/boletin14.htm]

CONTRERAS, A.; LUQUE, L. y ORDÓÑEZ, L. (2004), Una perspectiva didáctica en torno a los contextos y a los sistemas de representación semiótica del concepto de máximo, *Educación Matemática*, pp. 59-87.

DUBINSKY , E., (1991), Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (ed.): *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123), Dordrecht: Kluwer.

DUVAL, R. (2000), Basic Issues for Research in Mathematics Education (Plenary Address), en Taddao Nakahara an Masataka Koyama (eds): *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychologie of Mathematics Education* (tome I), pp. 55-69, Japan: Hiroshima University .

FONT, V. (2000a), *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*, Tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona.

FONT, V. (2000b), Representaciones ostensivas activadas en prácticas de justificación en instituciones escolares de enseñanza secundaria, *La lettre de la Preuve*, Noviembre/ Diciembre 2000, pp. 1-21. [URL: http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Font/Font00.pdf]

FONT, V. (2000c), Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno. *Uno,* 25, pp. 21-40.
FONT, V. (2001), Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola, *Revista EMA*, 6(2), pp. 180-200.
GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14(3), pp. 325-355.
GODINO. J.D. (2002), Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 22(2/3), pp. 237-284.
INGLADA, N y FONT, V. (2003). Significados institucionales y personales de la derivada. Conflictos semióticos relacionados con la notación incremental, *XIX Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (SI-IDM)*, Córdoba (Boletín nº 15), pp. 1-18. [URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm/boletin15.htm]
ORDÓÑEZ, L. y CONTRERAS, A. (2003), El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida en E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (ed): *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 277-287. Granada: Universidad de Granada.
TALL, D. (1992), L'enseignement de l'analyse a l'age de l'informatique. en B. Cornu (ed.) *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (pp. 161-182). Paris: Presses Universitaires de France.
WITTGENSTEIN, L. (1983), *Investigacions Filosòfiques,* Barcelona: Laia.