ACTA LATINOAMERICANA DE MATEMÁTICA EDUCATIVA
VOLUMEN 21

Editora:
Patricia Lestón
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Editores Asociados:
Cecilia Crespo Crespo, Carlos Oropeza Legorreta y Hugo Parra

Diseño de portada y CD:
Liliana Álvarez Díaz
Dirección de Educación Continua del Instituto Politécnico Nacional
Janet Ramírez Sandoval
CICATA-IPN, Legaria

Diseño de interiores:
José Francisco Canché Gómez
CICATA-IPN, Legaria

Digitalización:
Juan Gabriel Molina Zavaleta
CICATA-IPN, Legaria

Edición:

CMM 040505 IC7
Paseo de las Lomas 67. Parque Residencial Coacalco, CP 55720
Coacalco, Estado de México
México
www.cmmedu.com
ISBN: 978-970-9971-15-6

Lestón, P. (Ed.). (2008). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 21. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

PROCESOS EN MATEMÁTICAS. UNA PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA[7]

Vicenç Font, Norma Rubio, Ángel Contreras
Universitat de Barcelona — España
Pontificia Universidad Católica del Perú — Perú
Universidad de Jaén — España
vfont@ub.edu
Campo de investigación: Enfoque Ontosemiótico — Nivel: Superior

Resumen. *En este trabajo se presenta un desarrollo del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática afrontando la problemática del encaje de los "procesos" dentro de dicho marco teórico. Primero se ilustran con ejemplos los procesos asociados a las configuraciones de objetos y a las facetas duales considerados en el Enfoque Ontosemiótico. A continuación se propone considerar a la resolución de problemas o a la modelización como megaprocesos y se reflexiona sobre la relación entre estos últimos y el grupo de procesos considerado inicialmente.*

Palabras clave: procesos, enfoque ontosemiótico

Introducción

En diversos trabajos Godino y colaboradores han desarrollado el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (Contreras, Font, Luque, Ordóñez, 2005; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007) a partir de ahora utilizaremos el acrónimo EOS para referirnos a dicho enfoque. En Godino, Batanero y Font[8] (2006) se presenta una síntesis del desarrollo actual de dicho enfoque, en ella destaca la incorporación de determinados "procesos matemáticos" al marco teórico.

El objetivo de este trabajo es explicar como se entienden en el EOS los 16 procesos directamente considerados en dicho enfoque. La estructura de este trabajo es la siguiente, en la sección 2 se comenta muy brevemente el marco teórico del EOS. En la sección 3 se ilustran con ejemplos los 16 procesos directamente considerados en el EOS,

[7] Este trabajo se ha elaborado en el marco del proyecto I+D: MEC-FEDER: SEJ2004-06637/EDUC.

[8] Versión ampliada del artículo: Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. (en prensa)

mientras que en la sección 4 se comenta el encaje en el EOS de otros procesos. El trabajo termina con unas consideraciones finales.

Marco teórico

Tal como se ha dicho anteriormente, en este trabajo vamos a tomar como marco de referencia teórico el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática. En Godino, Batanero y Font (2006)[9] se presenta una síntesis del estado de desarrollo actual de dicho enfoque, en ella destaca la incorporación de determinados "procesos matemáticos" al marco teórico.

En la figura 1 se sintetizan una parte de las diferentes nociones teóricas propuestas por el EOS. En este enfoque la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones epistémicas (hexágono). Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales (decágono). Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos que se recogen en la figura 1.

[9] Para una profundización en la síntesis del marco teórico remitimos al lector a la lectura directa del documento (recuperable en http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm)

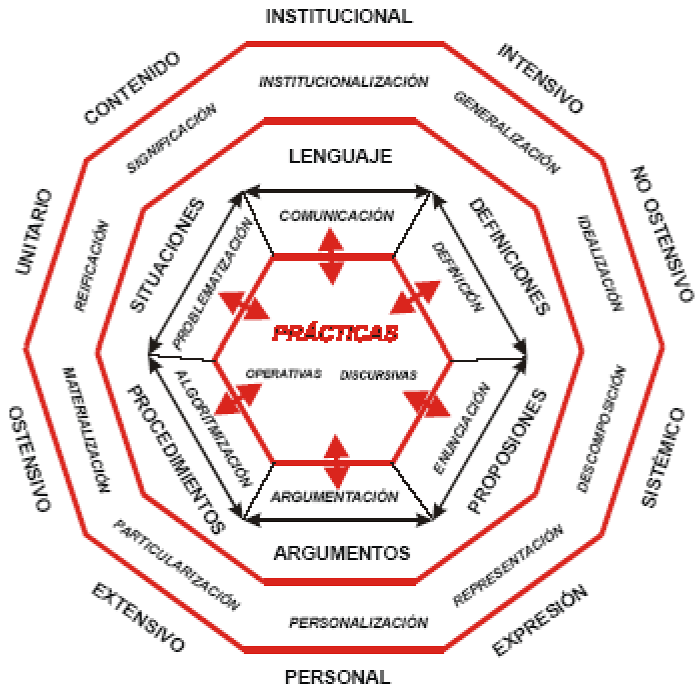


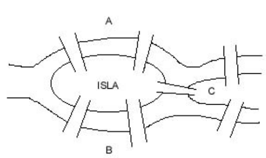
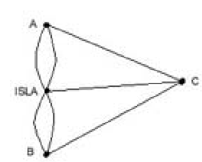
Figura 1. Modelo ontosemiótico de los conocimientos matemáticos

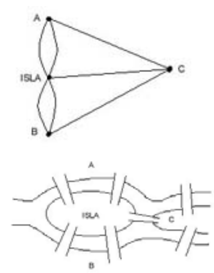
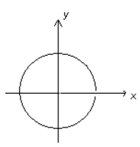
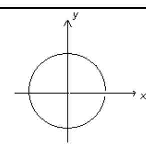
En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de "proceso" ya que hay muchas clases diferentes de procesos, se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, se puede hablar de procesos cognitivos, de procesos metacognitivos, de procesos de instrucción, de procesos de cambio, de procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que, quizás, la única característica común a muchos de ellos sea la consideración del factor "tiempo" y, en menor medida, el de "secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente". Por tanto, en el EOS, en lugar de dar una definición general de proceso, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los de la figura 1), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados en la actividad matemática, ni siquiera a todos los más importantes, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de comprensión o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos:

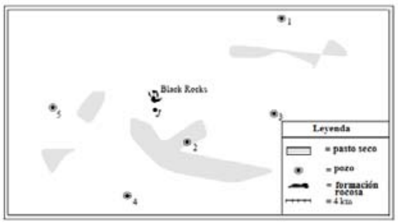
> La *resolución de problemas*, y de manera más general, la *modelización* debe ser considerada más bien como "hiper-procesos" matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de *conexiones* entre los objetos y *generalización* de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (*supervisión*) que conllevan procesos meta-cognitivos. (Godino, Batanero y Font, 2006, p. 9)

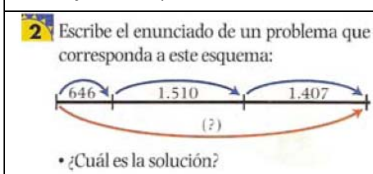
Procesos asociados a las configuraciones y a las facetas duales.

En este apartado ilustraremos con ejemplos los 16 procesos asociados a las configuraciones de objetos y a las facetas duales. En una única secuencia diáctica se podrían hallar la mayoría de los 16 procesos, pero por cuestiones de espacio hemos optado por presentar diferentes actividades y priorizar en cada una de ella un solo proceso. Por tanto, si bien en una misma tarea se puede inferir que intervienen muchos procesos y objetos, consideramos que según el contexto se puede priorizar un solo proceso y un solo objeto.

	Procesos		Objetos
Puentes de Königsberg Dos islas en el río Pregel que cruza Königsberg se unen entre ellas y con la tierra firme mediante siete puentes. ¿Es posible dar un paseo empezando por una cualquiera de las cuatro partes de tierra firme, cruzando cada puente una sola vez y volviendo al punto de partida? 	**Esquematización / idealización**	El problema anterior se puede trasladar a la siguiente pregunta: ¿se puede recorrer el dibujo terminando en el punto de partida sin repetir las líneas? 	Concepto (Grafo)

Idea de Grafo	**Materialización**		Lenguaje ostensivo (represntación geométrica)
 $x^2 + y^2 = r^2$	**Significación**	Circunferencia con centro (0, 0) y radio *r*.	Concepto (circumferencia)
Circunferencia con centro (0, 0) y radio *r*.	**Representación**	 $x^2 + y^2 = r^2$	Lenguaje (representación gráfica y algebraica)
Definición de límite	**Encapsulación/ Reificación/ cosificación/ síntesis**	$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	Concepto (de límite)
$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	**Desencapsulación / Descomposición / Análisis**	Interpretamos el límite como el valor al cual se aproximan las tasas medias de variación $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ cuando $h \to$ 0, y después focalizamos nuestra atención en esta clase.	Concepto (de límite)

1. *En el desierto*. *En la figura de abajo, se muestra parte de un mapa de un desierto. Hay cinco pozos en esta región. Imagínate que estás con tu rebaño de ovejas en J, que estás muy sediento y solo llevas esta mapa contigo.*  a)¿*A cuál de los pozos irías a tomar agua*? *No es difícil responder, por supuesto irías al pozo 2* *b) Señala otros dos lugares desde los cuales irías al pozo 2. Escógelos uno alejado del otro*. c) *Ahora, esboza una división del desierto en cinco partes; cada parte corresponde a uno de los pozos. Cada parte es el dominio alrededor de un pozo particular. Cualquier lugar en este dominio debe estar más cerca de este pozo que de los otros pozos*. d) *¿Qué es lo que puedes hacer cuando estás exactamente sobre la frontera de dos diferentes dominios*? e) *¿Los dominios de los pozos 1 y 5 son contiguos? 0*: *trata de encontrar un punto el cual esté a la misma distancia de los pozos 1 y 5 pero a mayor distancia de los demás pozos*. f) *En la realidad el desierto es mucho más grande de lo que es mostrado en este mapa. Si no hay otros pozos en todo el desierto que los cinco pozos mostrados, ¿los dominios de los pozos 3 y 4 están cerca (juntos)*? g) *La frontera entre los dominios de los pozos 2 y 3 corta al segmento de recta entre los pozos 2 y 3 exactamente en la mitad. ¿Algo similar se aplica a otras fronteras*? h) *¿Qué clase de líneas son las fronteras*? *¿Rectas o curvas*?	**Personalización**		Propiedad (*principio del Vecino más próximo*)
En este ejercicio se ha dividido un área de acuerdo al principio del Vecino más próximo (…)	**Institucionalización**		*Propiedad (principio del Vecino más próximo)*

En $\mathbb{R}^n$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, respectivamente, es d(A_1 , A_2)= $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$	**Particularización / Ejemplificación**	En $\mathbb{R}$, la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son x e y, respectivamente, es d(A_1 , A_2) $=\sqrt{(x-y)^2}$ En $\mathbb{R}^2$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son (x_1, x_2) y (y_1, y_2), respectivamente, es d(A_1 , A_2) = $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$	Concepto (distancia en $\mathbb{R}$)
En $\mathbb{R}$, la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son x e y, respectivamente, es d(A_1 , A_2) $=\sqrt{(x-y)^2}$ En $\mathbb{R}^2$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son (x_1, x_2) y (y_1, y_2), respectivamente, es d(A_1 , A_2) = $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$	**Generalización**	En $\mathbb{R}^n$ la distancia entre los puntos A_1 y A_2, cuyas coordenadas son $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $(y_1, y_2 \ldots y_n)$, respectivamente, es d(A_1 , A_2)= $\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots}$	Concepto (distancia en $\mathbb{R}^n$)
¿Es cierto que si $x < y$, entonces $x^2 < y^2$? Justifica tu respuesta.	**Argumentación**	No es cierto, basta tomar $x = -5$ e $y = -2$	Concepto (Desigualdad)
Calcula la derivada de la función: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{3x-4}$	**Algoritmización**	$f(x)=\dfrac{(2x-3)\cdot(3x-}{(3}$	*Procedimiento (regla de la derivación de un cociente)*
(…) En los problemas anteriores has encontrado una relación entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. ¿Cuál?	**Enunciación**	*La hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*	*Propiedad (teorema)*
La mediatriz de un segmento es la perpendicualr que pasa por el punto medio de dicho segmento. ¿Halla una definición equivalente?	**Definición**	*Todos los puntos que están a igual distancia de los extremos del segmento*	*Concepto (mediatriz)*
	**Problematización**	*María ha podido ahorrar en los meses de abril, mayo y junio 646; 1,510 y 1407 soles, respectivamente. ¿Cuánto ha ahorrado en total en estos tres meses?* *(solución: 3563)*	*Concepto (suma)*

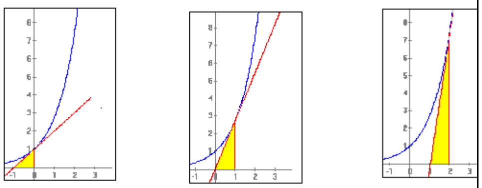
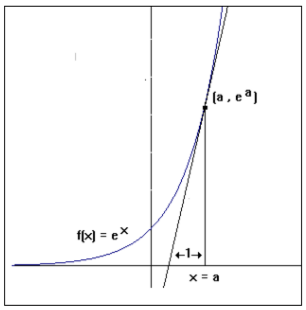
Cuestionario En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad: a) Calcula $f\,'(0)$, $f\,'(1)$ y $f\,'(2)$  b) Calcula $f\,'(a)$  c) Demuestra que la función derivada de la función $f(x) = e^x$ es la función $f\,'(x) = e^x$.	**Comunicación** **(Entiende y expresa)**	*Respuesta de Víctor al apartado c* La función derivada de $f\,(x) = e^x$ es $f\,'(x) = e^x$ porque la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente en este punto. La pendiente se consigue dividiendo $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, en esta función $x_2 - x_1$ siempre da 1, y al dividir el aumento vertical, que es e^x por el aumento horizontal que es 1, nos da e^x	*Concepto emergente (derivada de la función $f\,(x) = e^x$)*

Tabla 1: Ejemplos de los 16 procesos directamente considerados en el EOS

Otros procesos

En el EOS se consideran megaprocesos (por ejemplo resolución de problemas o modelización) y procesos. En el caso de estos últimos se distingue entre los 16 de la figura 1 y otros procesos (por ejemplo, los procesos metafóricos).

Por cuestiones de espacio en este trabajo no hemos profundizado en los 16 procesos de la figura 1. En Font y Contreras (2008) se profundiza en 4 de ellos: los procesos de materialización-idealización y los de particularización-generalización.

En el EOS, tanto el estudio de la relación entre algunos de los 16 procesos de la figura 1, como el estudio de otros procesos no considerados directamente en dicho marco, consiste es situar el proceso que nos interesa en el centro de la figura 1 para relacionarlo con los procesos de comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización y los procesos relacionados con las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales (institucionalización / personalización; generalización / particularización; descomposición / reificación; materialización / idealización; representación / significación). En Font (2007) se aplica dicha técnica a los procesos metafóricos.

En el caso de megaprocesos como son la resolución de problemas o la modelización también se descomponen en un conjunto de procesos más elementales y se intenta contestar a preguntas como las siguientes: ¿cuáles son estos procesos?, ¿cómo se relacionan entre ellos?, ¿cómo se desarrollan en el aula?, etc.

Consideracion final

El trabajo que se presenta pretende ser un aporte teórico que hay que enmarcar en la perspectiva del desarrollo del EOS. También queremos destacar que las diferentes miradas que posibilita la figura 1 son una buena manera de analizar la problemática de la relación entre procesos y megaprocesos.

Referencias bibliográficas

Contreras A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(2): 151-186.

Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. Educación Matemática, *19*(2), 95-128.

Font, V. y Contreras A. (2008) The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* (en prensa)

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in

Mathematics Education, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Disponible en internet: url: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico- semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88.