APLICACIÓN DE LAS FUNCIONES AL ESTUDIO DE MOSAICOS Y POLIEDROS

1. Introducción

La investigación que se presenta a continuación tiene su origen en mi función de director de trabajos de investigación realizados por alumnos de segundo de bachillerato (17 años) de la Comunidad Autónoma de Catalunya. En dicha comunidad, los alumnos de 2º de bachillerato deben cursar la asignatura "treball de recerca", la cual consiste en la realización de un trabajo individual de investigación dirigido por un tutor. Este trabajo suele durar seis meses aproximadamente.

La elección del tema de investigación no está determinado a priori y puede ser sugerido tanto por los alumnos como por el departamento de matemáticas de los centros. Una norma habitual es que los departamentos de matemáticas de los centros tengan que ofrecer a sus alumnos una selección de posibles temas que permita una trabajo de investigación a los alumnos. De esta manera, los departamentos tienen que reflexionar sobre qué tipo de problemas, susceptibles de generar una rica investigación matemática, pueden ser resueltos por los propios alumnos bajo la tutela del profesor encargado.

Este artículo tiene su origen en el diseño previo de uno de dichos trabajos de investigación. En concreto, se pretendía averiguar si los alumnos de 2º de bachillerato podrían contestar a la siguiente pregunta: ¿Cómo obtener todos los posibles mosaicos regulares, los mosaicos semiregulares, los poliedros regulares, los prismas y antiprismas formados con polígonos regulares y los poliedros arquimedianos?. Para ello, se tenía que contestar a esta pregunta utilizando sólo conocimientos matemáticos correspondientes al currículum de la enseñanza no universitaria. Es decir, se tenía que diseñar un camino que, a partir de los conocimientos que se podían suponer a los alumnos, permitiera responder a la pregunta anterior. Para responder a la pregunta se diseñó una estrategia de demostración que partía de los conocimientos previos de los alumnos sobre funciones e implicaba el uso de un graficador de funciones sencillo.

Para obtener todos los posibles mosaicos regulares, los mosaicos semiregulares, los poliedros regulares, los prismas y antiprismas formados con polígonos regulares y los poliedros arquimedianos hay que estudiar los diferentes casos que se pueden dar al considerar las caras que concurren en un vértice, lo cual implica hallar las soluciones enteras positivas que cumplen una inecuación del tipo $F(x_1, ..., x_n) < 0$, o una ecuación del tipo $F(x_1, ..., x_n) = 0$, donde $x_1, ..., x_n$ indican los lados de los polígonos regulares que concurren en un vértice.

Pongamos un ejemplo para ilustrar la afirmación anterior. Supongamos que queremos hallar todos los posibles mosaicos formados por tres polígonos regulares. Con tres polígonos regulares de lados m, n y p respectivamente se ha de cumplir la siguiente ecuación para teselar el plano: $\frac{180^\circ(m-2)}{m} + \frac{180^\circ(n-2)}{n} + \frac{180^\circ(p-2)}{p} = 360^\circ$, que simplificada queda: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}$. Esta igualdad también se puede transformar en $2np + 2mp + 2mn - mnp = 0$, con lo que se obtiene una expresión del tipo $F(x_1, x_2, x_3)=0$.

El número de incógnitas tiene que ser mayor que 2 ya que con uno o dos polígonos no se puede formar ningún mosaico ni ningún poliedro, ni puede ser mayor que 6 ya que 7 triángulos equiláteros concurriendo en un vértice suman más de 360º.

Una manera de hallar las soluciones de $F(x_1, ..., x_n) < 0$ o de $F(x_1, ..., x_n) = 0$ consiste en hacer ciertas consideraciones sobre los polígonos que concurren en un vértice de manera que en lugar de hallar las soluciones de la inecuación o de la igualdad anterior, tengamos que hallar las soluciones de inecuaciones del tipo $F(x, y) < 0$ o de igualdades del tipo $F(x, y) = 0$.

Podemos ilustrar esta afirmación continuando con el ejemplo de los tres polígonos regulares que concurren en un vértice. Si suponemos que hay dos polígonos iguales ($n = p$). La igualdad: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$ se convierte en: $\frac{1}{m}+\frac{2}{p}=\frac{1}{2}$, que es equivalente a $4m + 2p - pm = 0$, es decir $F(x, y) = 0$.

Ahora bien, utilizando un punto de vista funcional se pueden resolver gráficamente las inecuaciones con dos incógnitas. Basta aplicar la siguiente técnica:

> Dada la inecuación $F(x, y) \leq 0$, se puede hacer una partición del conjunto de puntos del plano en tres clases: el conjunto de puntos que son solución de $F(x, y) = 0$, el conjunto de puntos que son solución de $F(x, y) < 0$ y el conjunto de puntos que son solución de $F(x, y) > 0$. El conjunto de puntos que cumplen $F(x, y) = 0$ se puede encontrar haciendo la representación gráfica. Los otros dos conjuntos de puntos también se pueden hallar sustituyendo x e y por las coordenadas de determinados puntos que no forman parte de la gráfica de $F(x, y) = 0$.

Esta técnica de resolución sólo se puede utilizar en la práctica si tenemos posibilidades de representar gráficamente $F(x, y) = 0$ con cierta facilidad y rapidez. Por ejemplo si podemos utilizar un graficador de funciones sencillo como por ejemplo el agrapher.

A continuación aplicaremos esta técnica utilizando las posibilidades gráficas que permite un graficador sencillo como el agrapher. El procedimiento que seguiremos será estudiar los diferentes casos que se pueden dar al considerar las caras que concurren en un vértice, y en cada nuevo caso sólo consideraremos las posibilidades que no han aparecido al estudiar los casos anteriores.

2 Resolución del problema planteado utilizando un graficador de funciones

Uno y Dos polígonos en un vértice

Con uno o dos polígonos no se puede formar ningún mosaico ni ningún poliedro.

Tres polígonos en un vértice

Con tres polígonos regulares de lados m, n y p respectivamente se ha de cumplir la siguiente ecuación para teselar el plano: $\frac{180^{\circ}(m-2)}{m}+\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}+\frac{180^{\circ}(p-2)}{p}=$ 360º, que simplificada queda: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$

Supongamos que hay dos polígonos iguales (n = p). La igualdad anterior se convierte en: $\frac{1}{m}+\frac{2}{p}=\frac{1}{2}$, que es equivalente a $\frac{4m}{m-2}=p$. Si representamos la función $f(x)=\frac{4x}{x-2}$, el número de lados de los dos polígonos iguales (p) aparece en el eje de ordenadas y el número de lados del otro polígono en el eje de abscisas. Los puntos de coordenadas enteras que son de la gráfica de la función nos dan posibles teselaciones, mientras que los que se encuentran por debajo de la grafica son posibles poliedros siempre que x e y sean mayores o iguales a tres.

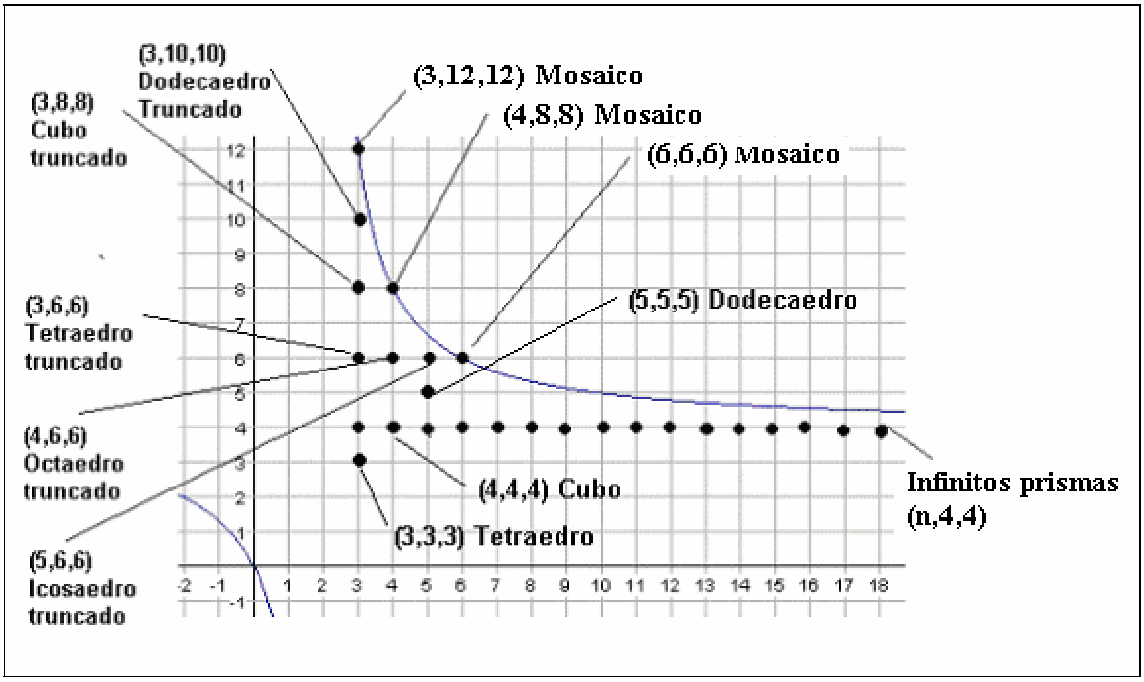

Ilustración 1

Si los tres polígonos son iguales aparecen las siguientes posibilidades: (3,3,3) tetraedro, (4,4,4) cubo y (5,5,5) dodecaedro. Si de los tres polígonos hay dos de iguales y uno de diferente, los primeros han de tener un número par de lados. Esta condición implica eliminar todos los puntos de coordenadas enteras con la segunda coordenada un número impar diferente de la primera coordenada.

Para demostrar que las caras iguales no pueden ser polígonos de un n.º impar de lados consideraremos primero un caso particular (un heptágono). En cada vértice concurren tres caras y, por tanto, tres aristas (dos son del heptágono). Las siete caras que limitan con el heptágono deberán ser, de manera alterna, un heptágono y un polígono de n lados. Tal como se observa en la figura siguiente, si empezamos en el vértice A y seguimos el sentido de las agujas del reloj, el hecho de que el número de lados sea impar obliga a repetir cara en ?. Pero, por otra parte, la cara ? no puede ser 7 ni n ya que, o habría un vértice 777 o uno $7nn$. Por tanto, las dos caras iguales han de ser polígonos pares.

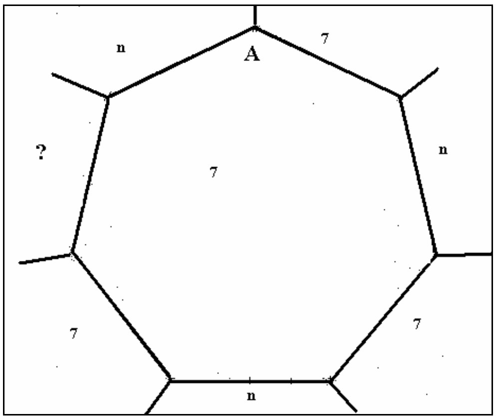

Ilustración 2

Fácilmente se observa que el razonamiento anterior se puede generalizar a cualquier polígono impar

La gráfica nos permite ver que, además del grupo de los tres sólidos platónicos con tres polígonos concurriendo en un vértice (tetraedro, cubo y dodecaedro), aparece un grupo de 5 polígonos semiregulares correspondiente a la familía de los "truncados". En los vértices de estos poliedros concurren tres polígonos y se obtienen "físicamente" de los poliedros regulares truncando por los vértices

También podemos observar que hay tres soluciones que son mosaicos. Una corresponde a un mosaico regular (666) y las otras dos corresponden a mosaicos semiregulares (488 y 3 12 12).

Por último, aparece la familia, infinita, de los prismas regulares. Gráficamente se observa que hay infinitas soluciones puesto que la recta $y = 4$ es una asíntota horizontal de la función.

Consideremos ahora el caso de tres polígonos diferentes: : $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}$

Supongamos m un valor fijo y representemos la función $f(x)=\frac{2mx}{(m-2)x-2m}$. Para un valor fijado previamente de m, los puntos de coordenadas enteras nos dan los dos polígonos que junto al polígono de m lados concurren en un vértice y suman 360º, los puntos que se encuentran en la parte inferior de la grafica nos dan una suma inferior a 360º. En esta gráfica los resultados se repiten ya que el punto (6,10) nos informa que si en un vértice concurren un polígono de m lados, un hexágono y un decágono la suma de los ángulos interiores es inferior a 360º. Esta misma información nos las da el punto de coordenadas (10,6).

Por otra parte si *m* es impar las otras dos caras han de ser iguales. Para demostrarlo, consideraremos primero un pentágono. En cada vértice concurren tres caras y, por tanto, tres aristas (dos son del pentágono). Las cinco caras que limitan con el pentágono deberán ser, de manera alterna, los otros dos polígonos. Tal como se observa en la figura siguiente, si empezamos en el vértice V y seguimos el sentido de las agujas del reloj, el hecho de que el número de lados sea impar obliga a repetir cara en ?.

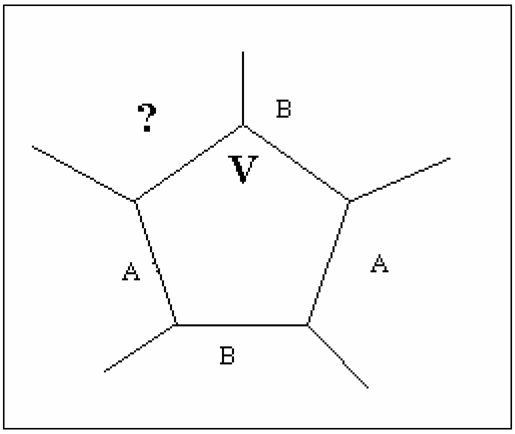

Ilustración 3

La única posibilidad para que en un vértice concurran las mismas caras es que $A=B$. Por tanto, si uno de los tres polígonos es impar los otros dos tienen que ser iguales. Fácilmente se observa que el razonamiento anterior se puede generalizar a cualquier polígono impar

Por otra parte si *m* es impar, al tener que ser las otras dos caras iguales, resulta que las soluciones ya han aparecido en el caso anterior. Por lo tanto, nos podemos limitar a estudiar los casos en que *m* es un número par mayor que 3.

Supongamos $m = 4$. La función es $f(x)=\dfrac{8x}{2x-8}$. Por simetría nos limitaremos a estudiar las soluciones que se encuentran en la región delimitada por la bisectriz del primer cuadrante, la gráfica de la función y el eje de abscisas. Podemos eliminar todos los puntos con alguna de las coordenadas menor que 3. También podemos eliminar los puntos con alguna coordenada igual a 4 ya que en este caso tendríamos dos polígonos iguales y obtendríamos soluciones que ya han aparecido anteriormente. También podemos dejar de considerar todos los puntos con alguna de las coordenadas impares, ya que, tal como se ha visto antes, en este caso los otros dos polígonos han de ser iguales y, por tanto, son soluciones que ya han salido anteriormente. Sólo quedan dos posibilidades para formar poliedros y una para formar mosaicos.

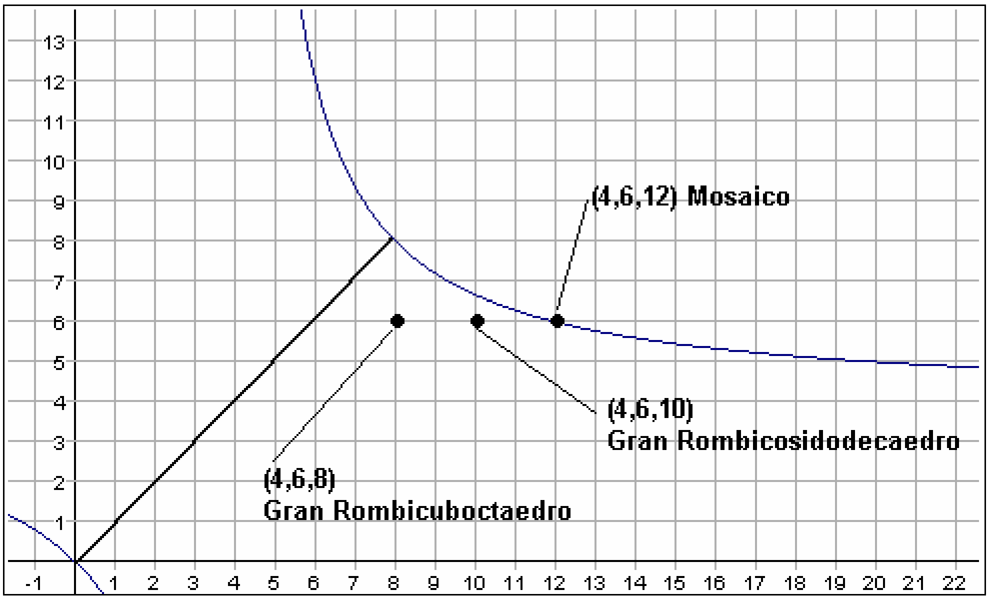

Ilustración 4

Para m = 6 vuelven a salir las tres posibilidades anteriores y no se añade ninguna nueva posibilidad. Para m = 8 vuelve a salir la posibilidad (4,6,8) y ninguna nueva posibilidad, mientras que para m = 10 vuelve a salir la posibilidad (4,6,10) y ninguna nueva posibilidad. Estas tres gráficas, aunque no añaden ninguna nueva posibilidad, nos permiten suponer que al aumentar m la función tiene las imágenes menores que la función anterior. Es decir, nos hace suponer que tenemos una sucesión de funciones f_m tales que $f_m(x) > f_{m+2}(x)$ para cualquier valor de x. En efecto, para cualquier valor de m (siendo m un número par mayor o igual que 3) se cumple:

$$\frac{2mx}{(m-2)x-2m} > \frac{2(m+2)x}{mx-2(m+2)}$$

Este resultado nos permite asegurar que para ningún valor de m ≤> 12 se puede encontrar ninguna nueva solución. En efecto, para m =12 no hay ninguna solución con los tres polígonos diferentes:

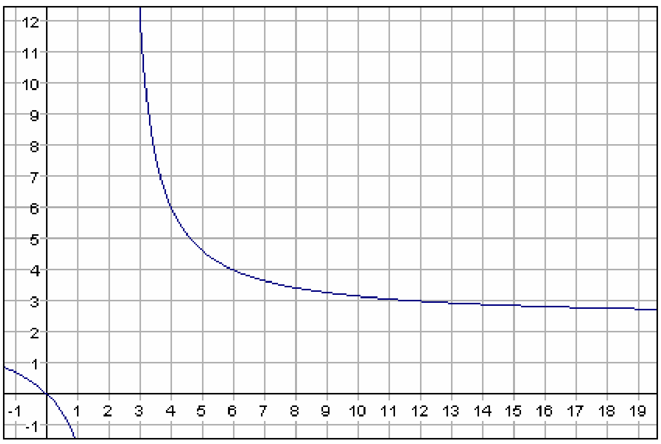

Ilustración 5

y para $m > 12$ tampoco hay solución ya que se cumple $\dfrac{2mx}{(m-2)x-2m} < \dfrac{24x}{10x-24}$.

Por tanto, para tres polígonos diferentes las únicas posibilidades son el gran rombicubooctaedro (4,6,8), el gran rombicosidodecaedro (4,6,10) y el mosaico (4,6,12) que son las soluciones que aparecen en las gráficas con *m* igual a 4, 6, 8 y 10.

Cuatro polígonos

Si intervienen cuatro polígonos regulares de lados *m*, *n*, *p*, y *q* respectivamente se ha de cumplir la siguiente ecuación para teselar el plano:

$$\frac{180^{\circ}(m-2)}{m}+\frac{180^{\circ}(n-2)}{n}+\frac{180^{\circ}(p-2)}{p}+\frac{180^{\circ}(q-2)}{q}=360^{\circ}$$

que simplificada queda: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

Consideramos primero el caso en que hay 3 polígonos iguales. La condición: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ se convierte en $\frac{1}{m}+\frac{3}{q}=1$. Si representamos la función $f(x)=\frac{3x}{x-1}$ obtenemos la siguiente gráfica:

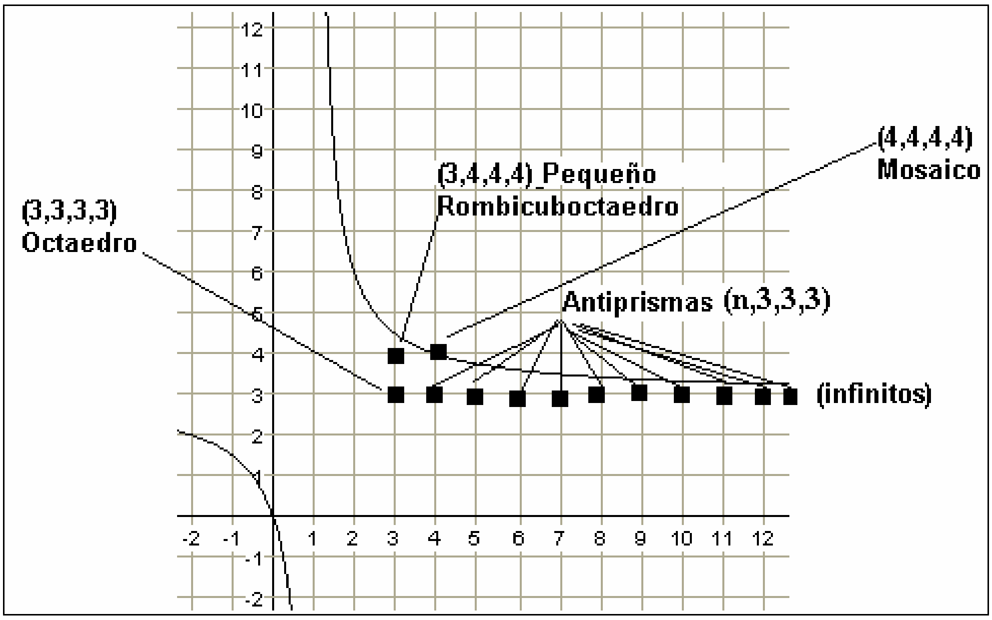

Ilustración 6

Vemos que aparece el pequeño rombicubooctaedro, el mosaico formado por 4 rectángulos y la familia, infinita, de los antiprismas. Por ejemplo la solución (6333) sería el antiprisma de base hexagonal y caras laterales que son triángulos equiláteros. También vemos que el tetraedro se puede considerar como un antiprisma de base un triángulo equilátero.

Supongamos ahora que en un vértice concurren dos pares de polígonos diferentes. La condición: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ se convierte en $\frac{2}{m}+\frac{2}{q}=1$. Si representamos la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$ obtenemos la siguiente gráfica:

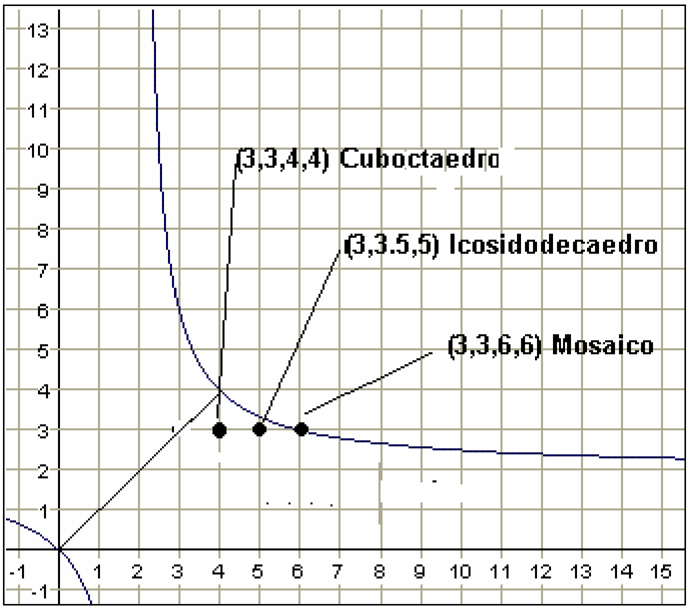

Ilustración 7

Hemos obtenido el cubooctaedro y el icosidodecaedro. También podemos observar que hay una solución que corresponde a un mosaico.

Vamos a considerar el caso de un par de polígonos iguales y de dos polígonos diferentes. La ecuación: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ se convierte en $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{2}{p}=1$

Supongamos un valor fijo para p y consideramos la función $f(x)=\dfrac{px}{(p-2)x-p}$. Si fijamos p = 3, resulta que con dos triángulos, estos no pueden ser adyacentes y los otros dos polígonos han de ser iguales, con lo que estaríamos en el caso anterior.

Supongamos dos triángulos adyacentes y dos polígonos diferentes concurriendo en A. Al considerar en el vértice B el mismo orden que en A tenemos que en el vértice C tienen que concurrir 3 triángulos, lo cual no puede ser. Por tanto, los dos triángulos tienen que ser opuestos por el vértice.

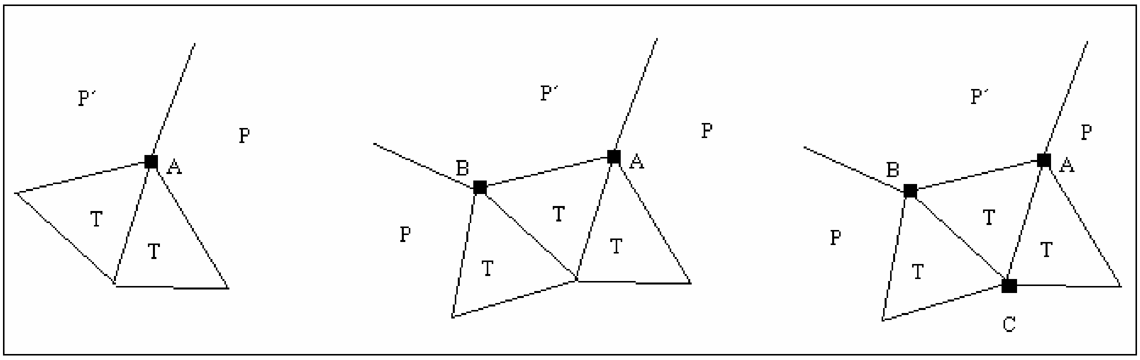

Ilustración 8

Si los dos triángulos son opuestos por el vértice, los otros dos polígonos han de ser iguales. En efecto en el vértice *A* concurren *P* y *P´* además de los dos triángulos, en *B* también, pero en *C* concurren dos triángulos y dos *P´*. La única posibilidad es que *P* = *P´*.

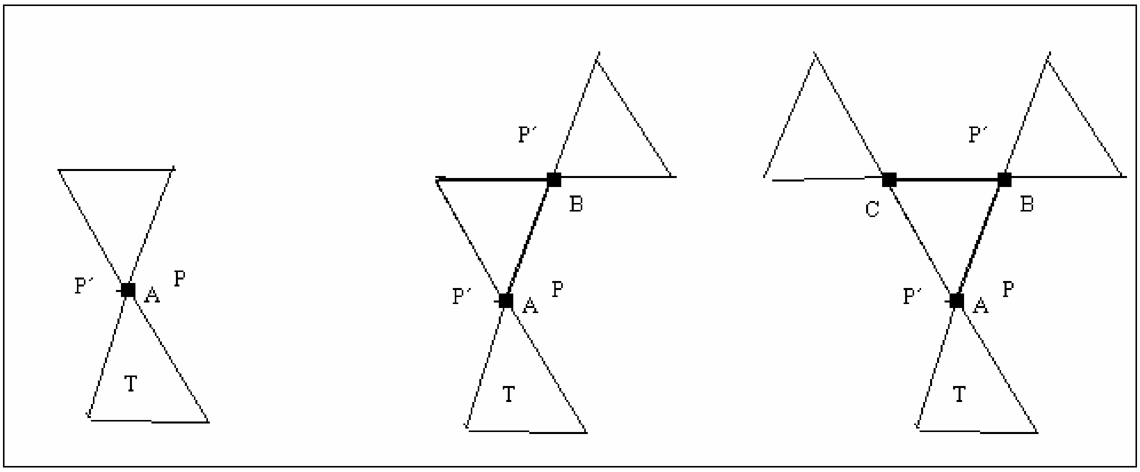

Ilustración 9

Para *p* = 4 se obtienen los resultados siguientes:

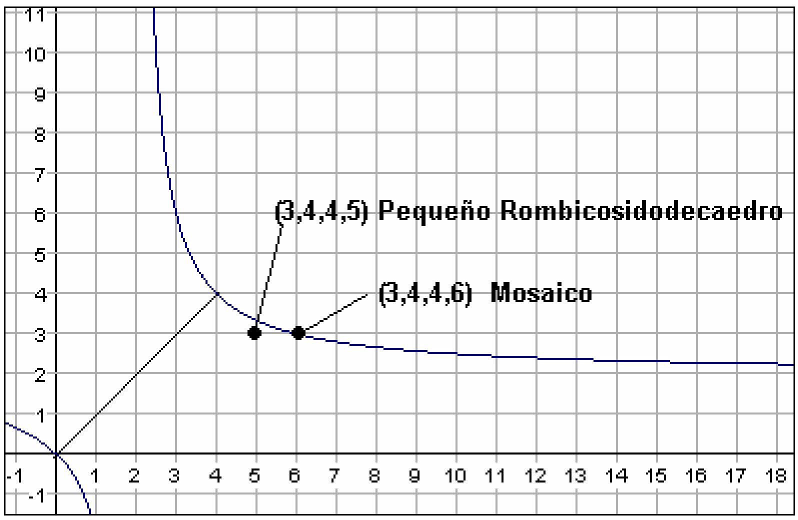

Ilustración 10

Seguimos el proceso y representamos la función para $p = 5$

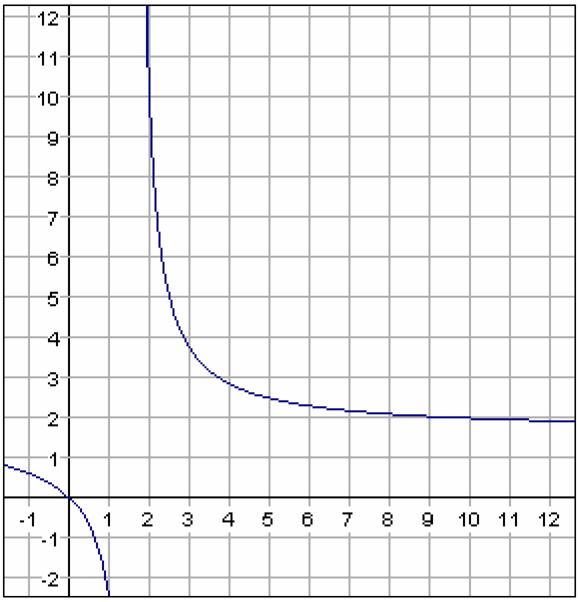

Ilustración 11

Que no añade ninguna nueva posibilidad pero que nos permite suponer que al aumentar p la nueva función tiene las imágenes menores que la función anterior. En efecto, se cumple que $\frac{px}{(p-2)x-p} < \frac{(p+1)x}{(p-1)x-p-1}$ para cualquier valor de p (siendo p un número mayor o igual que 3). Este resultado nos permite asegurar que para ningún valor de p superior a 4 se puede encontrar ninguna nueva solución.

Si suponemos que los 4 polígonos son diferentes, no hay ninguna posibilidad ya que la combinación mínima (3,4,5,6) ya suma más de 360º.

Cinco polígonos

Si intervienen cinco polígonos regulares de lados m, n, p, q, y r respectivamente se ha de cumplir la siguiente ecuación para teselar el plano:

$$\frac{180^{\circ}(m-2)}{m} + \frac{180^{\circ}(n-2)}{n} + \frac{180^{\circ}(p-2)}{p} + \frac{180^{\circ}(q-2)}{q} + \frac{180^{\circ}(r-2)}{r} = 360^{\circ}$$

que simplificada queda: $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{3}{2}$.

Si hay 3 polígonos diferentes, la suma de los ángulos interiores de cinco polígonos supera los 360º, por lo tanto con cinco polígonos sólo puede haber de dos clases diferentes. Caben las siguientes posibilidades: 4 y 1 o 3 y 2.

Consideramos el caso de 4 polígonos iguales. En este caso la condición: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{3}{2}$ se convierte en $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{3}{2}$. Si representamos la función $f(x)=\frac{8x}{3x-2}$ obtenemos la gráfica siguiente (la ordenada indica el número de lados de los 4 polígonos iguales)

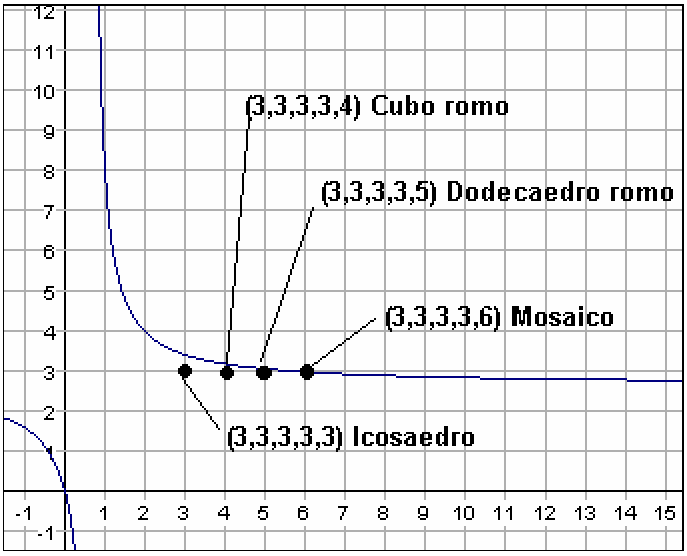

Ilustración 12

Además del icosaedro aparecen dos poliedros nuevos (el cubo romo y el icosaedro romo) y un mosaico.

Consideramos ahora el caso de 3 polígonos iguales. En este caso la condición: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{3}{2}$ se convierte en $\frac{2}{m}+\frac{3}{n}=\frac{3}{2}$. Si representamos la función $f(x)=\frac{6x}{3x-4}$ obtenemos la gráfica siguiente (la ordenada indica el número de lados de los 3 polígonos iguales)

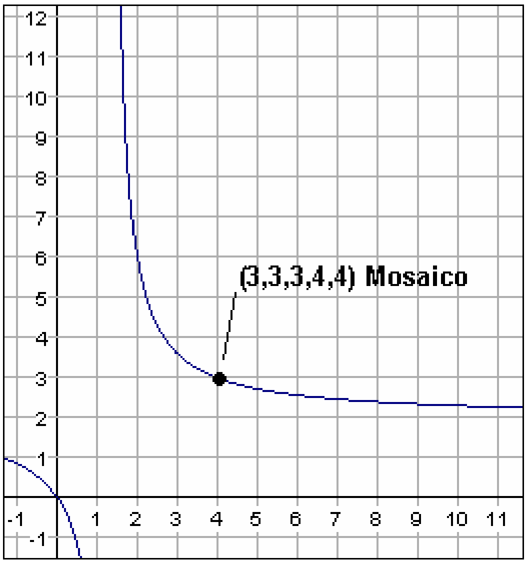

Ilustración 13

Con relación a esta solución hay que tener presente que hay dos posibles mosaicos semiregulares que se pueden formar con tres triángulos y 2 cuadrados.

Seis polígonos

En este caso la única posibilidad es (3,3,3,3,3,3). Es decir 6 triángulos equiláteros que forman mosaico

3 Conclusiones

Consideramos que en este artículo hemos dado suficientes argumentos para justificar que el estudio de los posibles mosaicos regulares, los mosaicos semiregulares, los poliedros regulares, los prismas y antiprismas formados con polígonos regulares y los poliedros arquimedianos es una tarea matemática que puede ser resuelta por un alumno de 2º de bachillerato que realice una investigación matemática supervisada por un tutor. La aplicación de un punto de vista funcional y la utilización de graficadores, tal como se ha expuesto en el apartado anterior, permite que la distancia entre el problema propuesto y los recursos con los que cuenta el alumno para resolverlos no sea insalvable si hay una intervención adecuada del tutor que facilite su investigación.