Font, V. (2002). Mosaicos y poliedros regulares. Un punto de vista funcional. *Epsilon*, n. 53. Volumen 18 (2), 297-303.

MOSAICOS Y POLIEDROS REGULARES. UN PUNTO DE VISTA FUNCIONAL

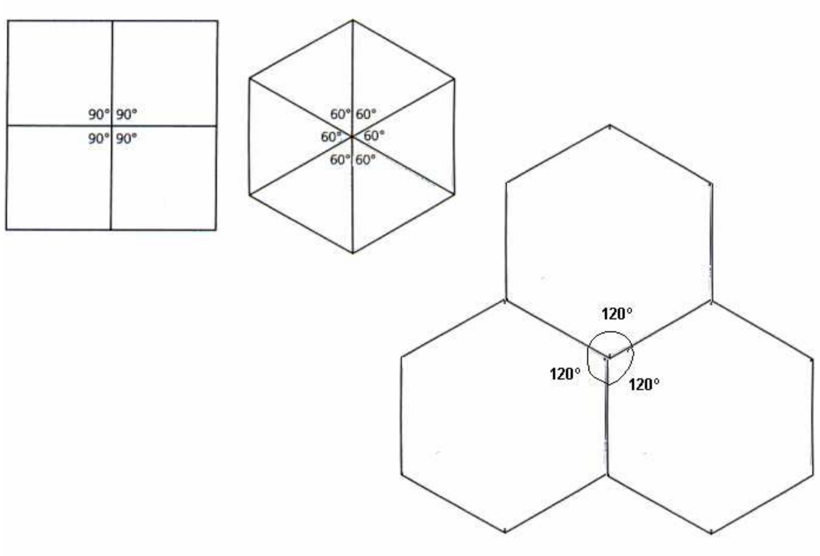
Vicenç Font

Departament de Didàctica de les CCEE i de la Matemàtica de la Universitat de Barcelona

Resumen: En este artículo se muestra como las transformaciones de funciones resultan útiles para demostrar que sólo hay tres mosaicos regulares y como el punto de vista funcional permite visualizar la relación entre los mosaicos regulares y los poliedros regulares

1 Mosaicos regulares

Los mosaicos regulares son construcciones geométricas que resultan de recubrir un plano con un polígono regular. La explicación de por qué, por ejemplo, con los triángulos equiláteros se puede embaldosar el suelo y con los pentágonos regulares no, es bastante simple. La suma de todos los ángulos que concurren en un punto ha de ser 360º. Si hacemos coincidir seis triángulos equiláteros, dado que cada ángulo es de 60º, tenemos 6·60º = 360º. Pero si hacemos coincidir tres pentágonos, dado que cada ángulo es de 108º, tenemos que 3·108º = 324º. Nos faltan 36º para sumar los 360º, un ángulo demasiado pequeño para encajar un cuarto pentágono. Utilizando esta condición es muy fácil llegar a la convicción de que entre todos los polígonos regulares, sólo el triángulo, el cuadrado y el hexágono permiten embaldosar el suelo.



Llegar a la convicción de que sólo hay tres mosaicos regulares se puede conseguir con una actividad que se puede trabajar en último ciclo de primaria -tal como se puede ver, por ejemplo, visitando la página Web realizada por los maestros y alumnos del CEIP Pompeu Fabra de Lloret de Mar http://www.xtec.es/ ceip-pompeufabra-lloret/ciencia/mosaic.htm-. También es una actividad habitual en muchos de los libros de texto de la ESO.

Una cuestión que resulta más complicada es demostrar por qué sólo hay estos tres mosaicos regulares. Supongamos conocida la fórmula $\frac{180^{o}(n-2)}{n}$ que nos permite saber el ángulo interior de un polígono regular. Dado que la suma de todos los ángulos que concurren en un punto ha de ser 360º , el ángulo interior ha de ser un divisor de 360º:

$$\frac{180^{o}(n-2)}{n} = \frac{360^{o}}{m} \quad (*)$$

donde n indica el número de lados del polígono regular y m el número de polígonos que concurren en un vértice. A partir de esta expresión se obtiene una ecuación equivalente:

Font, V. (2002). Mosaicos y poliedros regulares. Un punto de vista funcional. *Epsilon,* n. 53. Volumen 18 (2), 297-303.

$$\frac{n-2}{n} = \frac{2}{m} \rightarrow (n\text{-}2)m = 2n \rightarrow \quad nm \text{ -}2m \text{ -}2n = 0 \rightarrow nm \text{ -}2m \text{ -}2n + 4 = 4$$

$$(n\text{-}2)(m\text{-}2) = 4$$

que tiene como soluciones enteras positivas, con n mayor o igual que tres, las siguientes:

$$n_1 = 3 \text{ y } m_1 = 6 \ ; \ n_2 = 4 \text{ y } m_2 = 4 \ ; \ n_3 = 6 \text{ y } m_3 = 3$$

Una de les maneras de obtener estas soluciones consiste en considerar que las posibilidades para escribir 4 como un producto de dos números naturales son:

$1 \cdot 4 = 4 \rightarrow n\text{-}2 = 1$ y $m\text{-}2 = 4 \rightarrow n = 3$ y $m = 6$

$2 \cdot 2 = 4 \rightarrow n\text{-}2 = 2$ y $m\text{-}2 = 2 \rightarrow n = 4$ y $m = 4$

$4 \cdot 1 = 4 \rightarrow n\text{-}2 = 4$ y $m\text{-}2 = 1 \rightarrow n = 6$ y $m = 3$

La técnica que se ha aplicado es la que se aplica para resolver un caso particular de ecuación diofántica $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. La técnica de resolución de esta ecuación depende de los valores de A, B y C. Estos coeficientes determinan el tipo de curva que la ecuación representa en el plano: una recta doble, una elipse, una parábola, una hipérbola o un par de rectas. Estas curvas son el conjunto de soluciones *reales* y los puntos con coordenadas enteras son el conjunto de soluciones de las ecuaciones diofánticas. Cuando $A = C = 0$ y $B \neq 0$ se trata del llamado caso hiperbólico simple. La resolución se obtiene por el siguiente procedimiento:

Al ser $A = C = 0$, la ecuación original se reduce a $Bxy + Dx + Ey + F = 0$, por tanto:

$$\begin{aligned} Bxy + Dx + Ey + F &= 0 \\ Bxy + Dx + Ey &= -F \\ B^2xy + BDx + BEy &= -BF \end{aligned}$$

Font, V. (2002). Mosaicos y poliedros regulares. Un punto de vista funcional. *Epsilon*, n. 53. Volumen 18 (2), 297-303.

$$B^2xy + BDx + BEy + DE \quad = \; DE - BF$$

$$(Bx + E)\,(By + D) \qquad\qquad = \; DE - BF$$

Los valores de x y y se pueden hallar a partir de los divisores de $DE - BF$. Sean d_1, d_2, ..., d_n todos los divisores de $DE - BF$. Las soluciones son:

$$Bx + E = d_i \qquad\qquad By + D = \frac{(DE - BF)}{d_i}$$

$$Bx = d_i - E \qquad\qquad By = \frac{(DE - BF)}{d_i} - D$$

$$x = \frac{d_i - E}{B} \qquad\qquad y = \frac{(DE - BF)}{Bd_i} - \frac{D}{B}$$

2 Transformaciones de funciones

En el nivel de Bachillerato, otra manera de demostrar que sólo son posibles estas tres soluciones consiste en interpretar estas soluciones como puntos de coordenadas enteras positivas, con la primera coordenada mayor o igual que tres, de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ ya que la ecuación (*) se puede transformar de la manera siguiente:

$$\frac{180^{\text{o}}(n-2)}{n} = \frac{360^{\text{o}}}{m} \rightarrow (n\text{-}2)m = 2n \rightarrow m = \frac{2n}{n-2}$$

Las transformaciones permiten hallar los puntos de coordenadas enteras positivas con la primera coordenada mayor o igual que tres. En efecto la función $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$ se puede transformar en $f(x) = 2 + \dfrac{4}{x-2}$. Por tanto, la gráfica de esta función se puede considerar como la gráfica que resulta de trasladar dos unidades en vertical hacia arriba la grafica de la función $f(x)=\dfrac{4}{x-2}$, la cual a su vez se puede considerar como la gráfica que resulta de trasladar en horizontal dos unidades hacia la derecha la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{4}{x}$, la cual a su vez es una dilatación de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$

La función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ sólo tiene un punto con las dos coordenadas enteras positivas -el punto (1,1)-. La función $f(x)=\dfrac{4}{x}$ sólo tiene tres puntos de coordenadas enteras positivas ya que, al multiplicar por cuatro las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$, los únicos valores cuyo producto por 4 es un número natural, son: 1, 1/2 y 1/4. Por tanto, los puntos de coordenadas enteras positivas son (1,4), (2,2) y (4,1). Por otra parte, estos tres puntos son los únicos que al sumar dos a su primera coordenada continúan dando como resultado puntos de coordenadas enteras positivas: (3, 4), (4,2) (6,1). Estos tres puntos son los únicos que al sumar dos a su segunda coordenada continúan dando como resultado puntos de coordenadas enteras positivas: (3, 6), (4,4) y (6,3).

Por otra parte la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ sólo tiene otro punto con las dos coordenadas enteras negativas -el punto (-1,-1)-. La función $f(x)=\dfrac{4}{x}$ sólo tiene tres puntos de coordenadas enteras negativas, ya que al multiplicar por cuatro las ordenadas de los puntos de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$, los únicos valores tal que su producto por 4 es un número entero negativo son -1, -1/2 y -1/4. Por tanto los puntos de coordenadas enteras negativas son (-1,-4), (-2,-2) y (-4,-1). Por otra parte estos tres puntos son los únicos tal que al sumar dos a su primera coordenada continúan dando como resultado puntos de coordenadas enteras: (1, -4), (0,-2) y (-2,1). Estos tres puntos son los únicos tal que al sumar dos a su segunda coordenada continúan dando como resultado puntos de coordenadas enteras: (1, -2), (0,0) y (-2,3).

Por tanto los únicos puntos de coordenadas enteras positivas de la grafica de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$, con la primera coordenada mayor o igual que tres son: (3, 6), (4,4) y (6,3).

3 Poliedros regulares

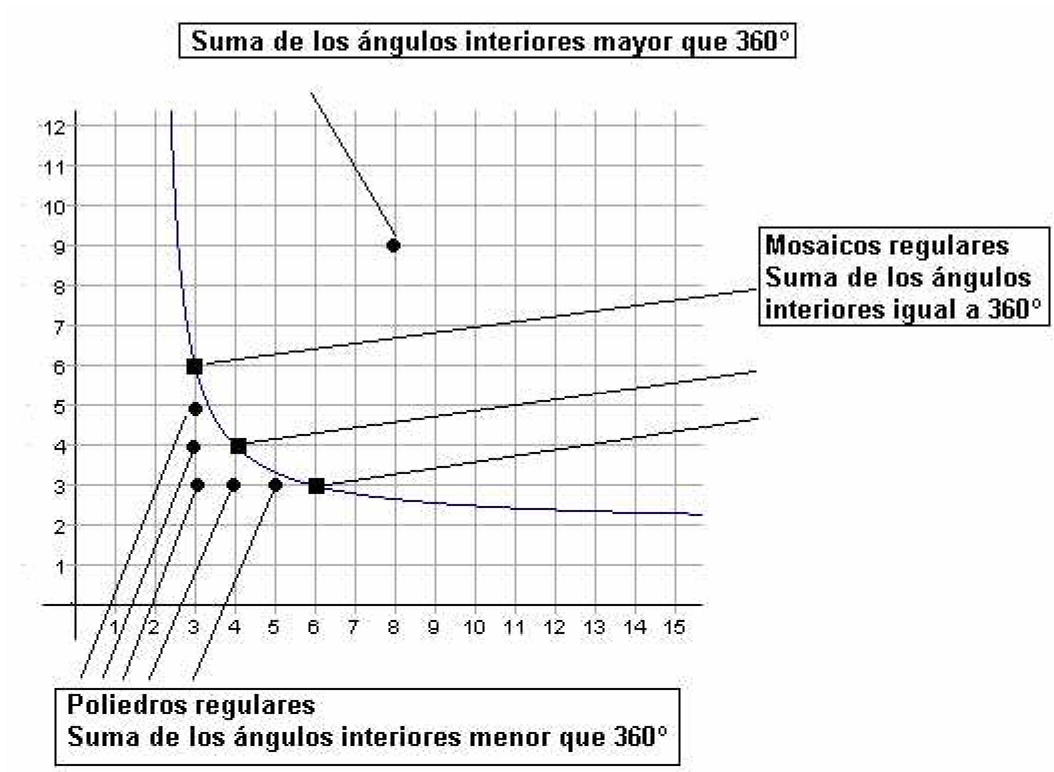
La función $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$ también puede ser útil para hallar los poliedros regulares y, sobretodo, para ver la relación entre los poliedros regulares y los mosaicos regulares. En efecto, una vez que los alumnos han llegado a la conclusión de que para formar un poliedro regular es necesario que la suma de los ángulos que concurren en un vértice sea inferior a 360º podemos escribir la siguiente condición que han de cumplir los poliedros regulares:

$$\frac{180^{\circ}(n-2)}{n} < \frac{360^{\circ}}{m}$$

donde *n* indica el número de lados y *m* el número de polígonos regulares que concurren en un vértice. Tal como hemos visto en el apartado 2:

$$\frac{180^{\circ}(n-2)}{n} = \frac{360^{\circ}}{m} \rightarrow (n\text{-}2)m = 2n \rightarrow m=\frac{2n}{n-2}$$

Los puntos con coordenadas enteras positivas de la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{2x}{x-2}$ son los que nos indican los polígonos regulares que teselan el plano: (3, 6), (4,4) y (6,3). ¿Pero qué información nos dan los puntos de coordenadas positivas que están por debajo de la grafica? ¿Y los que están por encima?. La respuesta es la siguiente:



Esta gráfica permite ver que los únicos poliedros regulares son

Nº de lados del polígono	Nº de polígonos	Nombre
3 (Triángulo)	3	Tetraedro
3 (Triángulo)	4	Octaedro
3 (Triángulo)	5	Icosaedro
4 (Cuadrado)	3	Cubo
5 (Pentágono)	3	Dodecaedro

4 Conclusión

Font, V. (2002). Mosaicos y poliedros regulares. Un punto de vista funcional. *Epsilon*, n. 53. Volumen 18 (2), 297-303.

Consideramos que la aplicación que hemos expuesto de las transformaciones de funciones a los mosaicos regulares[1] puede ser un buen ejemplo de cómo superar la simple explicación mecánica de dichas transformaciones mostrando su aplicación práctica.

****

1 La técnica que hemos comentado también se puede aplicar al estudio de los mosaicos semiregulares (Font V.: 2002, Algunes aplicacions de les transformacions de funcions al Batxillerat, *Biax* 20, en prensa)