Inglada, N.; Font, V. (2004) Le rôle des livres de texte comme médiateurs d'activation de la connaissance mathématique commune. In Giménez,, J, Fitzsimons,G, Hahn,C (ed) *Globalisation and mathematics Education. CIEAEM 54* (pp. 365-375). Barcelona: Graó.

LE RÔLE DES LIVRES DE TEXTE COMME MÉDIATEURS D'ACTIVATION DE LA CONNAISSANCE MATHÉMATIQUE COMMUNE. LE CAS DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES.

Neus Inglada et Vicenç Font,
Dept.Didàctica de les CC Experimentals i Matemàtiques.UB

Résumée

La Théorie des Fonctions Sémiotiques nous a permis d'analyser la structure des livres de texte utilisés dans le Batxillerat en faisant deux sortes d'analyse : une plus grossière et une autre plus fine. L'analyse grossière a consisté à analyser les techniques de dérivation qui doivent être maîtrisées par l'élève et les représentations ostensives que ces techniques impliquent utilisant le tableau proposé dans (Font 2000a). Pour illustrer l'analyse la plus fine nous avons analysé le treillis de fonctions sémiotiques impimplicite dans "compréhension" des définitions de dérivée en un point et de fonction dérivée proposées dans les livres de texte.

Abstract

The Theory of the Semiotic Functions allowed us to analyze the structure of the text books used in Batxillerat by making two sorts of analysis: a first rough analysis and a finer one. The unrefined analysis consisted in analyzing the techniques of differentiation which must be mastered by the pupil and the ostensive representations which these techniques imply using the table proposed in (Font 2000a) .In order to illustrate the finest analysis we analyzed the treilli of semiotic functions whic are implicit in the "understanding" of the definitions of derivative in a point and the derivative function proposed in text books.

INTRODUCTION

L'organisation mathématico-didactique proposée dans les livres de texte fait ressortir la position de leurs auteurs devant la question : Comment le savoir mathématique se structure-t-il dans les sujets ? comment le savoir mathématique est-il activé ? L'analyse des unités didactiques des livres de texte permet une catalogation à priori des practiques qui doivent provoquer l'emérgénce des objets personnels des élèves.

L'objectif de l'atelier était d'analyser l'organisation mathématico-didactique proposée dans les livres de texte utilisés dans le Batxillerat-LOGSE en Catalogne (16 à 18 ans) en utilisant les outils théoriques proposés par la théorie des Fonctions Sémiotiques de (Godino et Batanero 1994; Godino et Recio 1998) -TFS à partir d'ici. Cette théorie nous a permis d'analyser la structure des livres de texte utilisés dans le Batxillerat en faisant deux sortes d'analyse: une plus grossière et une autre plus fine. L'analyse grossière a consisté à analyser les techniques de dérivation qui doivent être maîtrisées par l'élève et les contenus qui doivent être introduits pour les justifier. Après, d'acord avec Font (2000a) nous avons consideré que le calcul de $f\,'(x)$ à partir de $f(x)$ peut être interprété comme un procédé sur lequel on doit considérer : (1) Les traductions entre les différentes formes ostensives de représenter $f(x)$, (2) Le passage d'une forme de représentation ostensive de $f(x)$ à une forme de représentation ostensive de $f\,'(x)$ et (3) La traduction entre les différentes formes ostensives de représenter $f\,'(x)$. Nous avons aussi étudié les representations ostensives que ces trois sousprocessus impliquent, utilisant le tableau proposé dans (Font 2000a).

À DE	Expression symbolique f '(x)	Graphique f '(x)	Table f '(x)	Description verbale de la situation (en termes de f '(x))	Expression symbolique f(x)	Graphique f(x)	Table f(x)
Expression symbolique f '(x)							
Graphique f '(x)							
Table f '(x)							
Description verbale de la situation (en termes de f '(x))							
Expression symbolique f(x)							
Graphique f(x)							
Table f(x)							
Description verbale de la situation (en termes def(x))							

Ce tableau, fondé sur celui de Janvier (1987), nous a permis de faire une étude globale des représentations utilisées dans les unités qui traitent les derivées dans chaque livre de texte. Les conclusions les plus remarquables sont les suivantes :

- Dans la plupart des livres de texte analysés, on traite un nombre réduit de représentations, ce qui montre une organisation mathématico-didactique très pauvre (p.e. le nombre de techniques utilisées dans le calcul de $f'(x)$ c'est très réduit).
- Il faut construire construire des outils, telles que le tableau prêcédent, pour évaluer la *richesse* des organisations mathématico-didactiques proposées par les livres de texte.

La TFS (Godino et Recio 1998; Contreras, Font, Luque et Ordóñez 2001) permet aussi de faire une analyse plus fine. Pour illustrer ce type d'analyse dans la deuxième partie de l'atelier nous analysons le treillis de fonctions sémiotiques implicite dans la "compréhension" des définitions de dérivée en un point et de fonction dérivée proposées dans les livres de texte analysés.

Utiliser les fonctions sémiotiques c'est très valide pour faire l'analyse sémiotique conjointe de la manipulation d'ostensifs dans un context social et de la pensée qui l'acompagne. Malgré la limitation que cela rapporte, il est operatif d'adresser tout le processus d'analyse en considerant comme expression ou contenu le domaine extensif-intensif du langage mathématique et souligner, ainsi, le caractère notationel[1] que, parfois, a c'est langage. Selon ce qu'on vien de dire, on met en consideration les fonctions sémiotiques suivantes (Font, 2000b):

	Ext	Int	Not
Ext	FS1	FS2	FS3
Int	FS4	FS5	FS6
Not	FS7	FS8	FS9

[1] Nous considérons comme langage notationel celui qui, dans un moment concret, on essaie d'institutionaliser. C'est a dire, quand la intention du subjet c'est celle d'espécifier l'objet mathématique avec un symbole o des symboles.

FS1 Cette fonction sémiotique met en rapport une entité extensionnelle avec une autre entité extensionnelle.

FS1.1 Elle met en rapport un objet avec un autre de la même espèce. Par exemple, elle met en rapport la fonction $f(x)$ avec la fonction $g(x)$.

FS1.2 Elle met en rapport un objet avec un autre qui n'est pas de la même espèce.

Cette fonction sémiotique serf à décrire, entre autres, la focalisation sur un des objets qui son manipulés dans les procédures qui son le resultat d'une désencapsulation [en termes de Dubinsky (1991)].

Par exemple, si nous avons l'objet $f(x)$, nous pouvons le désencapsuler dans un processus qui permet l'elève penser à la fonction comme quelque chose qui reçoit une entrée, ou plus, des valeurs de la variable indépendante, qui effectue une ou plus opérations sur les entrées, et qui donne les valeurs de la variable dépendante comme résultat. C'est-à-dire, l'objet $f(x)$ amène a d'autres objets (par exemple la variable independante x) et à une séquence d'actions (physiques ou mentales) que l'on doit effectuer avec ces objets. La focalisation sur un de ces objets (par exemple la variable x) serait le résultat de la fonction sémiotique qui a pour expression initiale la paire "*f(x)*/fonction" et comme contenu final la notation x. C'ést-à-dire, nous pouvons considérer la FS1.2 comme la fonction sémiotique qui met en rapport l'objet $f(x)$ avec l'objet x.

FS2 Cette fonction sémiotique met en rapport une entité extensionnelle avec une entité intensionnelle.

FS2.1 Elle met en rapport un objet avec la classe à laquelle il appartient. Par exemple, elle met en rapport $f(x)$ avec la classe "fonction".

FS2.2 Elle met en rapport un objet avec une classe à laquelle il n'appartient pas.

Cette sorte de fonction sémiotique permet décrire, par exemple, la désencapsulation d'un objet qui est le résultat d'un processus dans lequel interviennent des objets qui peuven être groupés dans une classe. Par exemple si nous avons l'objet $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et nous l'interpretons comme la valeur à laquelle s'approchent les taux moyens de variation $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand $h\to 0$, et après nous focalisons notre attention sur cette classe, nous sommes en train d'associer à l'expression $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (qui est une paire expression/contenu où le conentu c'est une "derivée" ou bien une "limite") avec le contenu formée par la classe de taux moyens, quand $h\to 0$ (qui ést un contenu qui a pour expression $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand $h\to 0$).

Nous avons un autre exemple quand nous interpretons un objet comme une espèce d'objets. Par exemple, quand une ligne courbe se considère comme un ensemble de points.

FS3 Cette fonction sémiotique met en rapport une entité extensionnelle avec un signe.

FS3.1 Cette fonction sémiotique met en rapport un objet avec un signe qui le représente.

Par exemple, la fonction sémiotique qui met en rapport la fonction qui fait correspondre chaque numéro avec son double, avec la formule $f(x)=2x$.

FS3.2 Cette fonction sémiotique met en rapport une entité extensionnelle avec un signe qui ne la représente pas.

Cette fonction sémiotique permet décrire des situations où la présence d'un certain objet nous suggère une notation relationnée. Par exemple, quand la graphique d'un polynôme est l'expression qui nous suggère que le terme dominant c'est x^n avec n paire.

FS4 Cette fonction sémiotique met en rapport une entité intensionnelle avec une entité extensionnelle.

FS4.1 Cette fonction sémiotique met en rapport una classe avec un exemple de cette classe. Par exemple, quand nous utilisons $f(x)=2x$ comme un exemple de la classe "fonction".

FS4.2 Cette fonction sémiotique met en rapport une classe avec un objet qui n'est pas de la même classe.

Cette sorte de fonction sémiotique peut décrire, par exemple, l'encapsulation d'une procedure où interviennent des objets qui peuvent être groupes dans une classe. Par exemple, si nous avons les taux moyens de variation $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand $h \to 0$ (expression/contenu) et c'est l'expression à laquelle nous associons le limite, $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Dans ce cas, nous associons une expression qui est une classe d'objets au contenu "limite", c'est-à-dire, le résultat du processus d'aproximation.

Nous avons un autre exemple quand nous interpretons une classe d'objets comme un objet. Par exemple, quand un ensemble de points est consideré comme une ligne courbe.

FS5 Cette fonction sémiotique met en rapport une entité intensionnelle avec une autre entité intensionnelle.

FS5.1 Cette fonction sémiotique definit une classe d'objets d'une manière diférente. Par exemple, quand nous mettons en rapport la définition de tangente en un point comme "la ligne droite qui, dans les proximités du point, s'approche plus a la ligne courbe" avec la définition de ligne droite tangente comme "limite des lignes droites sécantes".

FS5.2 Cette fonction sémiotique met en rapport une entité intensionnelle avec une autre entité intensionnelle différente.

Cette situation permet décrire la rélation entre concepts qui ne soit pas la rélation d'inclusion. Par exemple, quand la classe des fonctions trigonométriques nous mène à considérer la classe des fonctions trigonométriques inversées, où bien la classe des fonctions non périodiques.

FS6 Cette fonction sémiotique met en rapport une entité intensionnelle avec un signe.

FS6.1 Cette fonction sémiotique met en rapport une classe avec un signe qui la représente.

Par exemple, quand nous représentons la classe des fonctions par $f(x)$.

FS6.2 Cette fonction sémiotique met en rapport une classe avec un signe qui ne la représente pas.

Par exemple, quan nous mettons en rapport la classe de taux moyens variation $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quan $h \to 0$ avec notation $f'(x)$.

FS7 Cette fonction sémiotique met en rapport le signe avec une entité extensionnelle.

FS7.1 Cette fonction sémiotique met en rapport le signe avec l'objet qu'il représente.
Par exemple, quand nous mettons en rapport le signe $f(x) = 2x$ avec la fonction qui dit que à chaque nom lui fait correspondre son double.

FS7.2 Cette fonction sémiotique met en rapport le signe avec un objet qui ne le représente pas.
Par exemple, quan nous mettons en rapport le signe $f'(x)$ avec la fonction $f(x)$.

FS8 Cette fonction sémiotique met en rapport le signe avec une entité intentionnelle.

FS8.1 Cette fonction sémiotique met en rapport le signe avec la classe qu'il représente.
Par exemple, quan nous mettons en rapport le signe "fonction" avec la classe des fonctions.

FS8.2 Cette fonction sémiotique met en rapport le signe avec une classe qui ne le représente pas.
Par exemple, quand nous mettons en rapport la notation $f'(x)$ avec la classe de taux moyens de variation $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quand $h \to 0$.

FS9. Cette fonction sémiotique met en rapport une notation avec une autre notation.

FS9.1 Cette fonction sémiotique change la notation d'un objet/classe par une autre équivalente.

FS9.2 Cette fonction sémiotique met en rapport une notation avec une autre qui n'est pas équivalente.
Par exemple, quan nous mettons en rapport la notation des dérivées avec la notation des intégrales.

La conclusion que nous obtenons est la suivante:

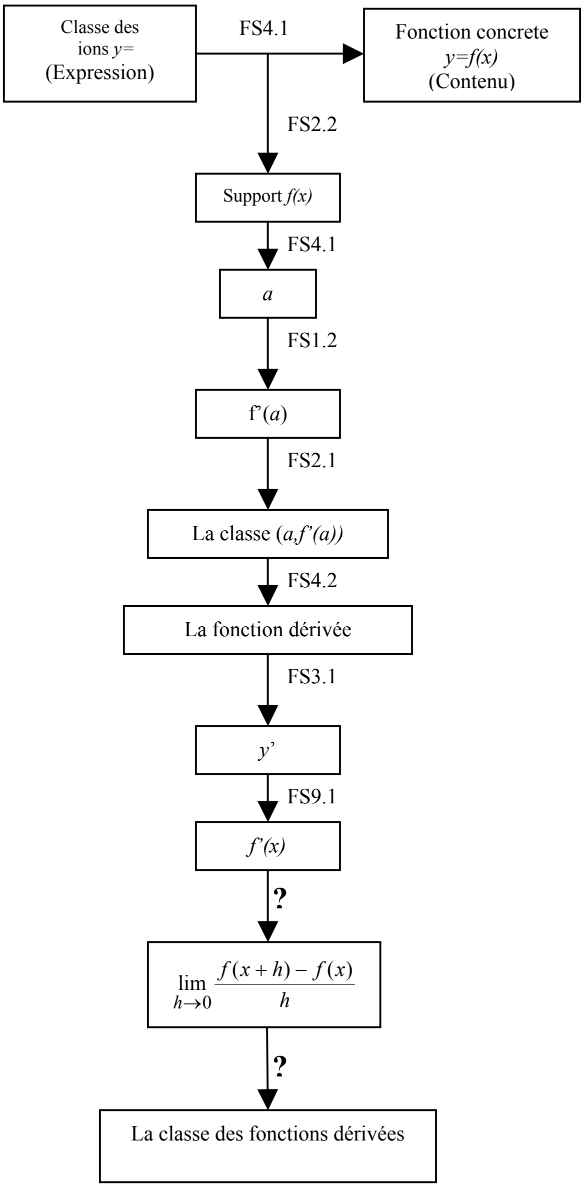
- L'analyse sémiotique nous montre que le processus qui doit être réalisé par l'élève pour *comprendre* le passage de la dérivée en un point à la fonction dérivée telle qu'elle est proposée dans les livres de texte est beaucoup plus complexe qu'il ne le semble a priori. Cela peut provoquer beaucoup de conflicts sémiotiques, surtout quand le livre ne dispose pas d'une séquence didactique pour affronter cette complexité.

Voilà, tout de suite, l'analyse de la definition de la *fonction dérivée d'une fonction* proposée dans Santillana –éditeur- (pg.225 livre de premier batxillerat) où on peut vérifier ce qu'on vien de dire:

Fonction dérivée d'une fonction
Etant donnée une fonction *y=f(x),* considérons maintenant une autre fonction qui, pour chaque point du support de *f*, donne sa dérivée *f '(a),* quand celle-ci existe. Cette fonction est la fonction dérivée de *y=f(x)* et est représentée par *f '(x)* ou *y* '.

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La treill de fonctions sémiotiques qui doit mettre dans le fonctionnement un élève hypothétique est le suivant**:**



•FS4.1 : Cette fonction sémiotique indique que de la classe de toutes les fonctions on considère une fonction concrete $y=f(x)$.

•FS2.2: Elle met en rapport un objet (la fonction) avec une classe à laquelle il n'appartient pas (son support).

•FS4.1 Cette fonction sémiotique met en rapport une classe (le support) avec un élément de cette classe (la valeur).

•FS1.2 Elle met en rapport une entité extensionnelle (a) avec un autre qui n'est pas de la même espèce (f '(a)).

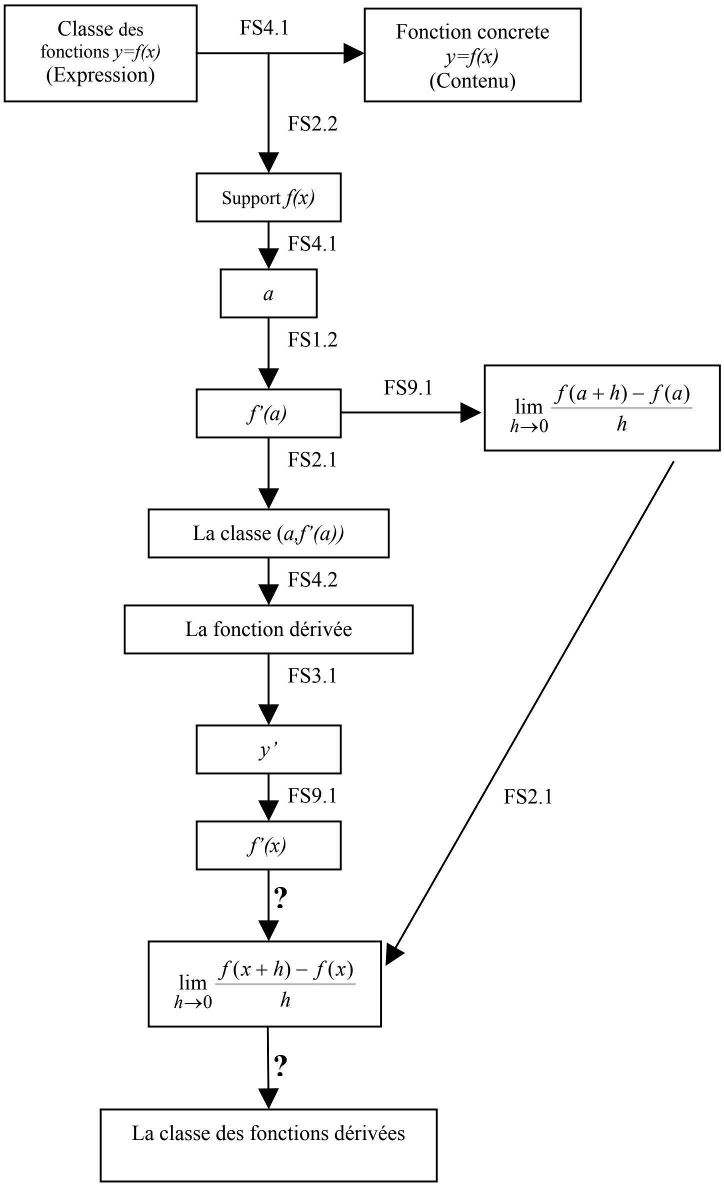
•FS2.1: Elle met en rapport un objet (a, f ' (a)) avec une classe à laquelle il appartient.

•FS4.2 Cette fonction sémiotique met en rapport une classe avec un élément avec un autre qui n'est pas de la classe.

•FS3.1: . Elle met en rapport l'objet limite avec un signe.

•FS9.1: Elle change la notation par une autre équivalente

L'analyse à priori avec des fonctions sémiotiques nous montre deux types de fonctions sémiotiques (les deux derniers représentés avec un point d'interrogation) fonctions lesquelles ne sont pas explicitement facilitées par l'auteur du texte. La dernière fonction sémiotique c'est du type FS2.1 puisque l'élève doit comprendre que la fonction dérivée obtenue de la fonction $y = f(x)$ elle est un membre de la classe des fonctions dérivées. Quoiqu'ici nous avons un conflit sémiotic potentiellement, le texte rapidement il propose des activités qui permettent l'élève de surmonter ce conflit. À nôtre avis c'est plus grave laisser à la charge de l'élève la fonction sémiotique qui permet d'interpréter $f'(x)$ comme $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Les foncitions sémiotiques avec ?, dans notre opinion, elles impliquent la treill de fonctions sémiotiques suivant:



- FS9.1: Elle change la notation par une autre équivalente.
- FS2.1: Elle met en rapport un objet avec une classe à laquelle il appartient.

Dans Catalunya seulement il y a deux textes (Castellnou et McGraw-Hill) qui présentent des séquences que, avant la définition de la fonction dérivée, permetent de comprendre, pour le cas des fonctions simples, telles que $f(x) = x^2$, le couple $(a, f\,'(a))$ comme une fonction, été appelé la fonction dérivée, la quelle permet pour chaque valeur, trouver sa dérivée et nous économise le calcul à partir de la définition de la limite. Cette séquence facilite que l'élève comprenne que l'image $f\,'(x)$ nous permet d'obtenir la limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Sans besoin de la calculer directement et, donc, cela facilite pour associer à l'expression $f\,'(x)$ le contenu $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

C'est pour ça que pour éviter ces conflits sémiotics il est nécessaire d'élaborer des séquences didactiques qu'ils permettent de construire un, ou plusieures fonctions sémiotiques avant la définition de la fonction dérivée comme $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Cette analyse c'est une des activités proposées aux participants de l'atelier.

ORGANISATION

L'atelier est organisé comme suit :

A) Partie théorique

- Analyse grossière de l'organisation d'une unité didactique concernant les dérivées dans le niveau du Batxillerat:
  - Techniques pour calculer $f'(x)$ et techniques pour calculer $f'(a)$.
  - Représentations ostensives de $f(x)$ i $f'(x)$ impliquées dans le calcul de la dérivée.
- Analyse fine du calcul de la dérivée de la fonction $f(x) = e^x$ prenant en compte : le processus d'abstraction et généralisation (Dubinsky 1991), pensée métaphorique (Lakoff et Núñez 2000) et fonctions sémiotiques (Contreras, Font, Luque et Ordóñez 2001).
- Analyse du treillis de fonctions sémiotiques implicite dans la "compréhension" des définitions de dérivée en un point et de fonction dérivée proposées dans les livres de texte

B) Partie pratique en utilisant les outils introduits dans la présentation de la partie théorique.

- (1) Analyse des différentes séquences d'activités pour calculer des dérivées, et (2) analyse de quelques définitions de dérivée en un point et de fonction dérivée.

C) Conclusions

- Mise en commun et discussion à propos des analyses que nous proposons pour les cas pratiques ainsi que sur les conclusions des recherches présentées dans la première partie.

Bibliografia

CONTRERAS, A.; FONT, V.; LUQUE, L.; ORDÓÑEZ, L.(2001) Un análisis semiótico de la noción de límite de una función, taller presentado al V Simposio del Seminario Español de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Almería. Setiembre de 2001

DUBINSKY , E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, en D. Tall (ed.): Advanced mathematical thinking (pp. 95-123). Dordrecht. Kluwer.

FONT, V. (2000a). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno, *Uno*, 25, pp. 21-40.

FONT, V. (2000b). *Expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades.* Thèse non publicée. Universitat de Barcelona.

GODINO, J.D. et BATANERO, C. (1994): Significado personal e institucional de los objetos matemáticos, Recherches en Didactiques des Mathématiques,14(3), pp. 325-355.

GODINO, J. D.; RECIO, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationship between thought, language and context in mathematics education. En: A. Olivier & K.

Inglada, N.; Font, V. (2004) Le rôle des livres de texte comme médiateurs d'activation de la connaissance mathématique commune. In Giménez,, J, Fitzsimons,G, Hahn,C (ed) *Globalisation and mathematics Education*. *CIEAEM 54* (pp. 365-375). Barcelona: Graó.

Newstead (eds.): *Proceedings of the 22nd PME Conference,* (Vol 3, pp. 3-1 a 3-8). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education.

JANVIER, C. (1987): Translation processes in mathematics education, en Janvier C. (ed.): Problems of representation in the teaching and learning of mathematics (pp. 27-32). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P.

LAKOFF, G. et NUÑEZ, R. (2000), Where Mathematics Comes From, Basic Books, New York.