

BASES EMPÍRICAS DE MODELOS TEÓRICOS EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS: REFLEXIONES SOBRE LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS Y EL ENFOQUE ONTOLÓGICO Y SEMIÓTICO¹

Miguel R. Wilhelmi <miguelr.wilhelmi@unavarra.es>, U. Pública de Navarra, España.

Juan D. Godino <jgodino@ugr.es>, U. de Granada, España.

Vicenç Font <vfont@ub.edu>, U. de Barcelona, España.

RESUMEN

Los problemas propuestos en didáctica de las matemáticas son muy complejos, puesto que se trata de resolver cuestiones científicas (describir y explicar el comportamiento de los sistemas didácticos), tecnológicas (desarrollar instrumentos de acción que incidan en estos sistemas) y prácticas (toma de decisiones locales eficaces). Esta situación justifica la existencia de diversos programas teóricos y metodológicos de investigación. No existe un marco único, ni acuerdo entre las diversas escuelas de pensamiento, los diversos programas y los distintos métodos de investigación, ni entre los estándares de verificación y de calidad. En este trabajo confrontamos la manera de producción y desarrollo de nociones teóricas en la teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1998) y el enfoque ontológico y semiótico (Godino, 2002); y, al mismo tiempo, las formas de aplicación y funcionamiento de sus métodos de investigación.

Palabras clave: ingeniería didáctica, complejidad ontosemiótica, comparación de teorías.

1. INTRODUCCIÓN

Nos proponemos analizar algunas características de la Teoría de situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 1998) y del Enfoque ontosemiótico (EOS) (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Contreras y cols., en prensa) relativas al tipo de fenómenos didácticos identificables mediante el uso de sus respectivas herramientas teóricas.

El desafío que abordamos es mostrar qué tipo de hechos, regularidades y explicaciones, de orden micro y macro didáctico, puede proporcionar el EOS, que son transparentes o irrelevantes en otras teorías, en particular para la TSD. La noción de función semiótica y una ontología matemática asociada posibilitan explicaciones microdidácticas de los procesos de cognición e instrucción matemática. La noción de sistema de prácticas y el estudio de la ecología de los significados permiten describir y explicar hechos y fenómenos cognitivos, epistémicos e instruccionales más globales (macrodidácticos).

Las teorías objeto de análisis comparten el interés por describir, explicar, y en última instancia, por elaborar conocimientos que ayuden a regular los procesos de estudio matemático desde planteamientos científicos. Sin embargo, los hechos y los fenómenos didácticos no coinciden completamente. Por ello, antes de abordar el fondo del tema planteado es necesario clarificar el uso que en didáctica de la matemática se hace de los

¹ Traducción de la comunicación “Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques: réflexions sur la théorie de situations didactiques et le point de vue ontologique et sémiotique”, presentada en el *Colloque International «Didactiques : quelles références épistemologiques?»*, organizado por la “Association Francophone Internationale de Recherche Scientifique en Education (AFIRSE)” y celebrado en el IUFM d’Aquitaine (Bordeaux, France) del 25 al 27 de mayo de 2005. [Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_eos.htm].

términos “*hecho*” y “*fenómeno*”. También habrá que clarificar el tipo de *explicaciones* que es posible aportar en didáctica de la matemática.

Una vez realizadas estas aclaraciones teóricas, mostraremos en qué sentido el EOS se puede incorporar de manera consistente y útil dentro de la TSD, aunque la adopción de algunos supuestos de tipo ontosemiótico puede requerir una revisión de los modelos epistemológico e instruccional implícitos en la TSD. Veremos que el análisis que hace la TSD de las tareas instruccionales puede completarse mediante el empleo de algunas herramientas del EOS para explicar las dificultades potenciales de los alumnos. Asimismo, la noción de función semiótica puede enriquecer y precisar la idea de sentido, la cual se usa sólo de manera implícita en la TSD, a pesar de ser considerada como esencial.

2. HECHOS, FENÓMENOS Y EXPLICACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

En el estudio de los sistemas didácticos se consideran hechos y fenómenos *epistémicos* (relacionados con el saber matemático), *cognitivos* (propios de los sujetos que participan en un determinado proceso de estudio) e *instruccionales* (relativos al proceso de enseñanza y a las restricciones supra-institucionales).

Para nosotros un *hecho* didáctico es cualquier acontecimiento que tiene un lugar y un tiempo en el devenir de los procesos de instrucción matemática y que, por alguna razón, se considera como una unidad (por ejemplo, resolver una ecuación en la pizarra). Los procesos son secuencias temporalmente ordenadas de acontecimientos de manera que cada miembro de la secuencia toma parte en la determinación del siguiente (por ejemplo, el profesor propone un problema con un enunciado, el alumno plantea una ecuación, la resuelve en su cuaderno, el profesor le pide que resuelva el problema en la pizarra y el alumno sigue las indicaciones del profesor). La distinción entre acontecimiento y proceso es sólo relativa ya que a su vez el acontecimiento se puede analizar como un proceso y un proceso como una unidad de un proceso más complejo.

Los hechos (acontecimientos o procesos), cuando se interpretan por medio de una teoría se convierten en un *fenómeno singular*. Pueden ser fenómenos que presentan una cierta regularidad (dan pie a la generalización) o bien son sólo singulares (dan pie a “teoremas de existencia y a contraejemplos”). Uno de los problemas que nos encontramos en el diseño y puesta en marcha de investigaciones científicas (y, por tanto, en la producción de conocimiento científico) es distinguir si los hechos o procesos observables son casos particulares de un fenómeno más general o bien son fenómenos singulares.

Puesto que todo hecho es observado, descrito y explicado por alguien (que implícita o explícitamente adopta una perspectiva teórica) cabe afirmar que “todo hecho es fenómeno”. Sin embargo, hay características elementales en los acontecimientos que son observadas por no importa qué observador y que, por lo tanto, fundamentan la base de un consenso sobre el mismo. De esta manera, el hecho queda definido de forma sucinta como “la parte de un fenómeno sobre la cual hay consenso”.

Lo dicho puede sintetizarse utilizando una metáfora vectorial. Todo fenómeno queda descrito como una n -tupla, donde cada componente representa una característica del mismo. Las *características* o *variables* pueden considerarse en la investigación desde dos puntos de vista diferentes: uno, como *variables explicadas* (v_1, \dots, v_r), que son problematizadas por la perspectiva teórica utilizada para analizar el proceso de estudio; otro, como *variables explicativas* (w_1, \dots, w_s), que se usan para describir las explicadas

en dicha perspectiva y predecir su comportamiento en situaciones “controladas” (generalmente de forma parcial). De esta manera un fenómeno es:

Fenómeno $\equiv (w_1, \dots, w_s; v_1, \dots, v_r)$; donde las v_j quedan explicadas por las w_j , $j = 1, \dots, r$

Dos enfoques teóricos diferentes pueden coincidir en que determinadas características o variables están presentes en el fenómeno considerado (por ejemplo, dos enfoques por muy diferentes que sean llegarán a un consenso sobre la edad de los alumnos, el nivel escolar, etc.) pero pueden diferir en su consideración de dichas variables como explicadas o explicativas. Es decir, puede existir un cierto consenso en algunas de las variables que deben ser consideradas, pero no necesariamente en el papel que juegan las mismas.

Las variables espaciales y temporales (dónde y cuándo se desarrolla un acontecimiento) o la edad de lo protagonistas son características normalmente consideradas en cualquier marco teórico. Por otro lado, otras características como la complejidad semiótica, los significados personales (propios de cada estudiante individual) e institucionales (de la clase como institución) o el funcionamiento de los signos en el discurso matemático representan descriptores explicativos relativos a una teoría específica. Por ejemplo, la teoría APOS y el EOS pueden considerar dos fenómenos que esquemáticamente se pueden representar de la siguiente manera:

Fenómeno APOS = (edad de alumnos, Institución escolar de bachillerato, función derivada, no haber llegado al nivel *trans* en la coordinación de los esquemas algebraico y gráfico de la derivada; dificultad de comprensión de la noción “función derivada”)

Fenómeno EOS = (edad de alumnos, Institución escolar de bachillerato, función derivada, complejidad semiótica asociada a la función derivada; dificultad de comprensión de la noción “función derivada”)

Los dos fenómenos coinciden en la característica explicada y que por lo tanto ha de ser problematizada (dificultad observada en la comprensión que tienen los alumnos de este objeto “derivada”) pero difieren en la variable explicativa que según cada teoría es más característica del fenómeno observado. En la APOS dicha característica podría ser que los esquemas de los alumnos no hubieran llegado a un determinado nivel de desarrollo, mientras que en el EOS esta característica explicativa sería la complejidad semiótica asociada a la noción “función derivada”.

Otro ejemplo lo tenemos en que la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1997) estima que los significados personales no son representativos para la descripción de fenómenos didácticos, puesto que lo esencial no es qué hace o sabe cada individuo particular sino cuál es su comportamiento como miembro de la comunidad de estudio a la que pertenece. Sin embargo, tanto la TSD como el EOS consideran la característica “significado personal” como fundamental para la descripción de los procesos de estudio. De hecho, la TSD determina que las “re-acciones” del sujeto al medio antagonista son una de las características esenciales para la descripción de la construcción y comunicación de los saberes. Por su parte, el EOS a la hora de explicar los procesos cognitivos e instruccionales utiliza la entidad dual personal-institucional, que presupone que ambas dimensiones no pueden ser autoexplicadas sino que únicamente pueden ser comprendidas por oposición una de la otra. De esta forma, la característica “significado personal” tiene en la TAD un peso nulo, mientras que la TSD y el EOS fundan parte de la descripción de los fenómenos didácticos sobre esta característica.

Según lo dicho, los fenómenos quedan constituidos por una colección de características (psicológicas, semióticas, sociológicas, epistémicas, etc.) que serán explicitadas o no (y

con diferente grado de desarrollo) por las diferentes teorías para la descripción y explicación de dichos fenómenos.

La importancia que atribuimos a la explicación nos lleva a tener que clarificar el uso de este término. Hay investigadores, que después de haber detectado un fenómeno que ocurre con una cierta generalidad, creen aconsejable una cierta modestia en la presentación de resultados y opten por utilizar expresiones “débiles” del tipo: <<es probable>>; <<en nuestra opinión>>; <<sería conveniente>> etc. y dejen de lado expresiones “fuertes” del tipo: <<implica>>, <<hemos demostrado>> , <<la causa es>>, etc. Su prudencia les lleva básicamente a describir fenómenos y cuando se aventuran a dar explicaciones de dichos fenómenos lo hacen de una manera “débil”, no en términos de “causa eficiente” sino simplemente como elementos a tener en cuenta.

Otros investigadores se mantienen firmes en su intento de imitar a las ciencias experimentales y optan por afirmaciones “fuertes”. Estos investigadores no se limitan a describir el fenómeno y a dar explicaciones plausibles de por qué ha sucedido, sino que, en su afán por imitar a las ciencias puras ensayan una respuesta a la pregunta genérica siguiente: *¿de acuerdo con qué leyes generales y qué condiciones antecedentes se produce el fenómeno?*

Su ideal sería conseguir una explicación científica del fenómeno de acuerdo al siguiente esquema: si E describe un hecho, puede decirse que las circunstancias antecedentes señaladas en $C_1, C_2... C_k$ “causan” en conjunto aquel hecho, en el sentido de que existen ciertas “leyes generales” expresadas por $L_1, L_2... L_r$, las cuales implican que toda vez que ocurran condiciones del tipo indicado por $C_1, C_2... C_k$, tendrá lugar un hecho del tipo descrito en E

Ahora bien, puesto que son conscientes de que este ideal es un objetivo muy difícil de conseguir en la didáctica de las matemáticas (actualmente parece inviable determinar qué es una ley general en la didáctica de las matemáticas) se conformarían con sustituir este ideal por otro: la *explicación causal*. La explicación causal tiene la siguiente estructura: si E describe un hecho, puede decirse que las circunstancias antecedentes señaladas en $C_1, C_2... C_k$ “causan” en conjunto aquel hecho, en el sentido de que existen ciertas regularidades empíricas expresadas por $L_1, L_2... L_r$, las cuales implican que toda vez que ocurran condiciones del tipo indicado por $C_1, C_2... C_k$, tendrá lugar un hecho del tipo descrito en E. Es decir, se señalan un conjunto de causas pero no se llega a concretar el “mecanismo causal”².

De hecho los partidarios de imitar, dentro de lo posible, a las ciencias experimentales se conforman con algo menos y diluyen este esquema de modelo causal de explicación en uno más general que se puede formular de la siguiente manera: Dado un fenómeno que se observa con cierta regularidad (1) hay que buscar las causas y (2) estas causas han de producir inevitablemente (o al menos en la mayoría de los casos) el fenómeno en cuestión.

Todo lo dicho nos lleva a formular las siguientes preguntas de investigación :

- ¿Qué hechos y fenómenos consideran la TSD y el EOS? ¿Existe divergencia entre « lo observado y la forma de hacerlo y validarlo » entre ambas teorías ?

² Un ejemplo que puede ayudar a entender la diferencia entre “causas” y “mecanismo causal” es el de la evolución. Se puede afirmar que las formas vivientes actuales tienen antecedentes comunes en formas anteriores de las que proceden y, por tanto, éstas últimas se pueden considerar la causa de que existan las primeras. Pero además de lo anterior se puede explicar el mecanismo causal, es decir se puede explicar la evolución de las especies a partir del mecanismo de la selección natural.

- ¿La explicación de los fenómenos identificados en dichas teorías es del mismo tipo? ¿Se trata de una explicación débil o fuerte?

3. LOS FENÓMENOS SEGÚN LA TSD Y EL EOS

Los problemas propuestos en didáctica de las matemáticas son muy complejos, puesto que se trata de resolver cuestiones científicas (describir y explicar el comportamiento de los sistemas didácticos), tecnológicas (desarrollar instrumentos de acción que incidan en estos sistemas) y prácticos (toma de decisiones locales eficaces). La descripción de los sistemas didácticos (su evolución y su sensibilidad a estímulos controlados o no, previstos o no, etc.) está fundada en hechos y fenómenos. Describimos a continuación algunas herramientas teóricas usadas para describir y explicar los fenómenos didácticos en la TSD y en el EOS.

3.1. Procesos de conceptualización y teorización según la TSD

La *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) permite a la TSD obtener comportamientos estables del “medio” (reproducibilidad de situaciones didácticas) que determinan el progreso de la didáctica de las matemáticas como instrumento técnico-práctico (*intervenciones críticas* en los sistemas didácticos) y como disciplina científica (*prueba de la contingencia*). Para la TSD:

- « [...] il est possible :
- d'établir une situation « fondamentale » correspondant à la connaissance en cause ;
 - de chercher les variables didactiques et les différentes conceptions qu'elles engendrent — en particulier celle que l'on suppose suffisante pour expliquer l'erreur ;
 - puis d'identifier des groupes d'élèves qui « séparent » ces conceptions, à l'aide d'analyses statistiques plus classiques. S'il n'y a pas de discrimination nette, il n'y a pas lieu de considérer les conceptions comme distinctes. » (Brousseau, 1998, pp.152–153)

El término « concepción » es utilizado como sinónimo de « estrategia de acción », esto es, como un conocimiento útil que permite interactuar con el medio (interpretar la información dada por el medio y producir una respuesta, en muchas ocasiones parcial, que posibilite la acción). De hecho, la modelización del aprendizaje representa la identificación de diferentes concepciones y la descripción de dicho aprendizaje como un proceso que permite el paso de una concepción a otra:

- « Pour modéliser l'apprentissage dans le cadre de la formalisation envisagée, il est nécessaire de disposer d'un univers de référence permettant d'organiser l'ensemble des conceptions et par rapport auquel pourra être posée une problématique d'évolution » (Balacheff, 1995, p.237).

La evolución viene determinada por la determinación de un medio antagonista que devuelva información al sujeto sobre las « consecuencias » de realizar ciertas acciones. De esta forma, por ejemplo, para poder hablar de « situación algorítmica » es preciso tomar en consideración la acción del sujeto como respuesta a un medio.

- « Un sujeto está en una situación algorítmica si, para resolver un problema, está obligado a construir, a partir de un objeto A, un objeto B que resuelve dicho problema. Además, la construcción del objeto B no está debida al azar y el sujeto debe ser capaz de reproducir los gestos, técnicas, procedimientos que le permitieron obtener B a partir de A sin necesidad de tener que resolver un problema concreto. El hecho de que el sujeto sea capaz de construir el objeto B supone aceptar que es capaz de imaginar la función de dicho objeto; esto determina un verdadero conocimiento de la utilidad del objeto B » (Wilhelmi, 2003, p. 95).

La « caja negra » no es el sujeto, sino el medio antagonista, que permite identificar y describir el comportamiento del sistema didáctico y establecer relaciones de causalidad entre las acciones de los sujetos (estrategias de acción de los estudiantes o

intervenciones didácticas del profesor) y las informaciones que el medio les envía (posibilitando la retroacción, *feed-back*). La didáctica estudia entonces la sensibilidad del medio didáctico a « estímulos », esto es, modificaciones de los agentes, del medio material utilizado, de la institución en donde se desarrolla el proceso de estudio, etc. Se identifica un fenómeno cuando se establece una relación entre una intervención crítica sobre el medio y una respuesta de los sujetos. En este sentido, las *variables didácticas* representan « variables independientes que pueden ser controladas para provocar en los sujetos modificaciones en sus estrategias de acción para adaptarlas a las respuestas dadas por el medio antagonista y que han sido contrastadas empíricamente en situaciones equiparables (que permiten asegurar la reproducibilidad bajo ciertos presupuestos) ». De esta forma, la TSD intenta establecer explicaciones causales que permitan prever comportamientos potenciales del medio en situaciones controladas *a priori*.

3.2. Procesos de conceptualización y teorización según el EOS

El objetivo de base es el análisis de la aptitud de los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de un modelo epistemológico-cognitivo explícito basado en presupuestos ontosemióticos (Godino, 2002). Para cumplir este objetivo es preciso determinar una ontología matemática (y la relación de dependencia antecedente – consecuente que se puede establecer entre los objetos matemáticos identificados); asimismo es preciso describir los significados sistémicos (personales e institucionales) que determina la función de los objetos matemáticos en los diferentes contextos de uso y, por último, es necesario analizar los procesos de estudio como un complejo de estados de las dimensiones epistémica, cognitiva y didáctica (Godino, Contreras y Font, 2004).

La búsqueda de fenómenos didácticos no representa tanto encontrar relaciones de causalidad en los acontecimientos como determinar *criterios de idoneidad* en los procesos de cognición e instrucción matemáticos. Los criterios de idoneidad pueden ser sintetizados de la siguiente forma (Wilhelmi, Godino y Bencomo, 2004):

1. *Idoneidad epistémica*: adaptación entre los significados institucionales implementado y de referencia, que, en particular, supondría la elaboración de una transposición didáctica *viable* (capaz de adaptar el significado implementado al pretendido) y *pertinente* (capaz de adaptar el significado pretendido al de referencia).
2. *Idoneidad cognitiva*: el “material de aprendizaje” está en la *zona de desarrollo potencial* (Vygotski, 1934) de los alumnos; con otras palabras, que el desfase entre los significados institucionales implementados y los significados personales iniciales sea el máximo abordable teniendo en cuenta las restricciones cognitivas de los alumnos y los recursos humanos, materiales y temporales disponibles³.
3. *Idoneidad instruccional*: capacidad de las configuraciones y trayectorias didácticas para que el profesor o los alumnos identifiquen conflictos semióticos *potenciales (a priori)*, *efectivos* (durante el proceso de instrucción) y *residuales (a posteriori)*, para resolver dichos conflictos mediante la *negociación de significados* (utilizando los recursos disponibles, que determinan restricciones institucionales de carácter matemático y didáctico).

Las implicaciones que se deducen no tienen un carácter *normativo* o *técnico* (obtención de un listado de prescripciones “a ejecutar”), sino *explicativo* (determinación de

³ En el análisis de la dimensión cognitiva es preciso tener en cuenta los procesos sociales de construcción y comunicación de los objetos matemáticos. Las restricciones institucionales (de personal, materiales y de tiempo) determinan un marco para el análisis y la determinación de la dimensión cognitiva: “lo cognitivo” no es sinónimo de “mental”.

criterios para la valoración de la viabilidad y de la adecuación a un proyecto de enseñanza, así como, partiendo de realizaciones efectivas, evaluar la pertinencia de un proceso de instrucción matemática). Con otras palabras, las regularidades encontradas no son utilizadas para establecer relaciones causales formuladas en términos de leyes empíricas, sino como descriptores que guíen intervenciones puntuales, elaboración de currículos y diseño de investigaciones.

3.3. Ejemplo de un proceso de instrucción sobre la enseñanza de los procesos de medición en el ciclo medio como contexto de reflexión

Vamos a ejemplificar de manera somera nuestro análisis teórico mediante la aplicación de las nociones ontosemióticas a las experiencias, resultados y discusiones que se describen en el trabajo de G. y N. Brousseau (1991) sobre la medida en la escuela primaria titulado “El peso de un recipiente. Estudio de los problemas de la medición en CM”. El esquema que siguen estos investigadores está enmarcado en la TSD. El análisis *a priori*, en particular, la determinación de las restricciones institucionales (el estudio se inscribe dentro de una transposición didáctica del saber “medida”), permite la elaboración y puesta en marcha de una situación fundamental para dar *sentido* a los procesos de medida (estimación, error de medida, intervalo de aceptación, etc.) y desarrollar métodos fiables para realizar dichas medidas. La prueba de la contingencia permite contrastar las hipótesis formuladas *a priori* y concluir que:

“La mayor parte de los niños han sabido resolver más tarde los problemas clásicos de determinación del peso del contenido o del peso del recipiente. También han tomado conciencia de las desviaciones entre los resultados y las manipulaciones y los cálculos numéricos, han aceptado tomarlas en consideración y han sabido comentarlas. Muchos de los alumnos eran capaces de encontrar un intervalo y de dar un valor central, de elegir valores próximos, de rechazar los valores demasiado alejados y sobre todo de aceptar los de sus compañeros cuando eran diferentes de los suyos pero tenían desviaciones razonables” (p. 12).

Podemos calificar las conclusiones extraídas en el trabajo de G. y N. Brousseau como “causales estocásticas”, esto es, el medio puesto en juego y las intervenciones críticas en el sistema didáctico son causa del aprendizaje de “la mayor parte de los alumnos” y, por lo tanto, hay una relación causa (instrucción) – efecto (aprendizaje) para un porcentaje elevado de los alumnos, que han sido confrontados con éxito a conocimientos empíricos, matemáticos e incluso epistemológicos valiosos. Los presupuestos teóricos de la TSD postulan entonces que la *situación de institucionalización* estructurará el saber en la clase (para todos los alumnos) como un instrumento *práctico* (reutilizable en situaciones similares) y *teórico* (conocimiento lógico estructurado, empíricamente contrastado).

Desde el EOS se intentarían afrontar dos cuestiones fundamentales: una, qué ocurrió con los alumnos que no han logrado una eficiente retroacción con el medio; otra, qué sentido atribuyen estos alumnos a las explicaciones dadas por el profesor en la situación de institucionalización. De hecho, consideramos que la noción de *conocimiento* matemático y de *sentido* de un conocimiento de la TSD debe ser precisada. El EOS propone que cualquier contenido de una función semiótica (par, expresión-contenido) es un conocimiento para el sujeto (individuo o institución) que la establece, y que dicho contenido es el significado (o sentido) que el sujeto atribuye a la expresión. Esta conceptualización del conocimiento y del sentido, unida a la ontología que le asociamos proporciona una herramienta potente para analizar los procesos cognitivos y semióticos que tienen lugar en el estudio de las matemáticas. En esta misma línea, Bloch (2005) muestra dos ejemplos para apoyar la tesis según la cual los análisis semióticos

contribuyen a la identificación y descripción de los procesos de construcción y comunicación de los significados matemáticos.

“These two examples show the interest of a semiotic analyse of the students’ work: it helps to identify the difficulties students can encounter while trying to perform a task [...] The use of a pertinent and dynamic semiotic theory is also necessary to build new situations aiming a mathematical concept, since situations are using representatives from adequate settings [...] A semiotic investigation is useful to build alternate routes to reification of mathematical concepts” (Bloch, 2005, p.9).

Por otro lado, G. y N. Brousseau derivan de su análisis del concepto de medida unas consecuencias para la acción educativa consistentes en proponer como objeto de enseñanza el tratamiento de los errores de medida y el uso de ese tratamiento para validar una modelización matemática elemental. Estas prescripciones se ajustan a una idoneidad epistémica empíricamente contrastada; sin embargo, parece necesario explicitar una valoración sobre la idoneidad de las dimensiones cognitiva e instruccional del proceso de estudio.

Como investigadores externos, en relación con la *dimensión cognitiva*, nos preguntamos cuál es la naturaleza de las “dificultades” que han tenido los alumnos que no han interactuado eficazmente con el medio: ¿representan *obstáculos cognitivos*?, ¿es la muestra de un *contrato didáctico* no aceptado por dichos alumnos?, ¿las *intervenciones críticas* del profesor han sido pertinentes?, ¿el acto de la *devolución* ha contribuido a la exclusión de estos alumnos?, ¿por qué el control de las *variables didácticas* por parte del profesor no ha conseguido la evolución de las *estrategias de base* hacia la estrategia ganadora que será posteriormente institucionalizada?, etc.

Por otro lado, en relación con la *dimensión instruccional*: ¿tienen los maestros los conocimientos matemáticos y didácticos para gestionar de manera adecuada la situación fundamental propuesta?, ¿las *restricciones institucionales* en la escuela primaria permiten el gasto de tiempo y recursos necesarios para llevar a cabo la propuesta educativa apuntada?, ¿es posible poner en juego métodos de enseñanza que contribuyan a que los alumnos den sentido a los objetos matemáticos involucrados sin tener que limitarse a situaciones adidácticas?, ¿qué papel podrían desempeñar *momentos de institucionalización “locales”* que provocaran discontinuidades en el proceso de estudio y cuyo fin sería la economía de recursos temporales y de conocimientos matemático-didácticos por parte de los maestros (*prescripciones normativas*)?, etc.

4. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

La TSD proporciona herramientas para analizar los procesos de instrucción matemática y valorar la idoneidad de tales procesos en términos de los aprendizajes matemáticos logrados. La asunción, por dicha teoría, de la hipótesis del aprendizaje matemático en términos de adaptación a un medio adidáctico puede orientar de manera consistente la construcción de situaciones didácticas mediante las cuales los alumnos construyan los conocimientos matemáticos dándoles sentido. Ahora bien, esta implicación normativa no supone la aceptación ingenua de identificar la idoneidad de un proceso de estudio con el grado de adidacticidad del mismo. De hecho, el objetivo central de la TSD es la construcción de una ciencia explicativa de los procesos de comunicación y construcción de objetos matemáticos, no la elaboración de prescripciones normativas para la enseñanza de los tópicos matemáticos.

Estas prescripciones son identificadas en la TSD con ingenierías didácticas puntuales o globales, que intentan articular situaciones adidácticas y didácticas. Esta articulación sugiere un punto de confluencia entre la TSD y el EOS. La noción de “sistema de

prácticas operativas y discursivas” puede ser interpretada como una supraestructura para determinar la representatividad de una situación fundamental y para establecer mecanismos de regulación locales dentro de un proceso global de estudio, así como para construir situaciones cuyo objetivo sea la rutinización de técnicas y la estandarización en el uso del lenguaje (que favorezca la negociación de significados). En este sentido, Schneider (2001) analiza las tensiones entre la teoría de situaciones y la teoría antropológica con relación al concepto de adidacticidad, el axioma de existencia de las situaciones fundamentales, así como el diseño de organizaciones matemáticas y didácticas idóneas desde el punto de vista matemático. En este trabajo, Schneider sugiere también el interés de examinar “otros proyectos del mismo tipo que analicen las relaciones entre praxeologías didácticas y praxeologías matemáticas” (p. 54).

Por otro lado, si bien la TSD y el EOS coinciden en la naturaleza de los fenómenos que identifican y describen (cognitivos, epistémicos e instruccionales⁴), no hay acuerdo en la “unidad funcional de medida” necesaria para explicarlos. A modo de ejemplo, la identificación y descripción de fenómenos cognitivos según la TSD supone determinar las concepciones de los alumnos como re-acciones al medio antagonista, teniendo en cuenta las intervenciones críticas del profesor (en particular, como gestor de la devolución). Con otras palabras, los fenómenos cognitivos pueden ser descritos únicamente como dimensión del sistema didáctico. En el EOS esta perspectiva se adopta cuando los fenómenos cognitivos se analizan en términos de la faceta dual personal-institucional; sin embargo, el análisis de las otras facetas (ostensivo-no ostensivo, ejemplar-tipo, elemental-sistémico, etc.) determinan nuevos instrumentos para la descripción de las trayectorias cognitivas de los sujetos y que, por lo tanto, permiten identificar fenómenos cognitivos no asimilables a estados del sistema didáctico. Asimismo, permite un tipo de explicación de las regularidades en los hechos didácticos basadas principalmente en la complejidad ontosemiótica de los conocimientos matemáticos pretendidos.

Otra de las diferencias fundamentales entre la TSD y el EOS es el tipo de explicaciones de los fenómenos. En nuestra opinión, el ideal de explicación de la TSD, al menos de manera implícita, se inclina por una manera “fuerte” de entender la explicación de los “fenómenos didácticos”. Por ejemplo, la construcción del conocimiento a partir de una situación fundamental seguiría la siguiente estructura: si E describe un hecho (la construcción del conocimiento en cuestión por un alumno), puede decirse que las circunstancias antecedentes o condiciones iniciales C_1, \dots, C_k (presentación de una situación fundamental, devolución de la situación a los alumnos, etc.) “causan en conjunto” aquel hecho, en el sentido de que existen ciertas regularidades empíricas expresadas por L_1, \dots, L_r (en particular, la construcción del conocimiento asociado a la situación fundamental), las cuales implican que la mayoría de veces que ocurran condiciones del tipo indicado por C_1, \dots, C_k , tendrá lugar un hecho del tipo E.

En cambio, el EOS se sitúa, de momento, en una la versión más “débil” de la explicación. Aunque, para algunos fenómenos, podemos estar en condiciones de señalar ciertas causas que tienen “mucho que ver” con el fenómeno en cuestión. Nuestra opinión es que de entrada la didáctica de las matemáticas se ha de centrar en preguntas del tipo: ¿qué dice?, ¿qué hace?, ¿cómo lo hace?, ¿qué entiende?, ¿cómo lo entiende?, ¿cómo lo interpreta?, etc. preguntas propias del *paradigma interpretativo*. Ahora bien,

⁴ En la *ingeniería didáctica* (Artigue, 1989) se determina esta dimensión como “didáctica” o aquella referida al sistema de enseñanza. Dentro del EOS se reserva la voz “didáctica” para las descripciones *sistémicas*, que engloban todas las dimensiones constitutivas del “sistema didáctico” o “proceso de estudio”.

creemos que también hay que formular la pregunta “¿por qué?”, sin tener que asumir el supuesto, suscrito por la mayoría de los positivistas, de que las explicaciones causales son la única manera de responder a los interrogantes de la ciencia, y sin que esto implique negar que algunos fenómenos didácticos se puedan explicar de manera causal por leyes didácticas. Asimismo, tampoco creemos que tengamos que renunciar a preguntas del tipo, ¿cómo puedo cambiar este estado de cosas?, ¿cómo puedo mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje?, etc.

Reconocimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto PIE 10/2005 UPV-EHU.

REFERENCES

- ARTIGUE M. (1989): Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 282–307.
- BALACHEFF N. (1995): Conception, connaissance et concept. *Séminaire n°157, DidaTech*. Paris: Université Joseph Fourier. pp.219–244.
- BLOCH I. (2005 février): Conceptualisation through semiotic tools in teaching/learning situations. Proceedings of CERME 4, Sant Feliu de Guixols, Espagne.
[<http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/11/paperswg11.htm>].
- BROUSSEAU G. (1998): *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU G. y BROUSSEAU N. (1991): Le poids d'un récipient. Étude des problèmes du mesurage en CM. *Gran N*, n° 50: 65–87.
- CHEVALLARD Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- CONTRERAS A., FONT V., LUQUE L. y ORDÓÑEZ L. (en prensa), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, *Recherches en Didactique des Mathématiques*.
- GODINO J. D. (2002): Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237–284.
- GODINO J. D. y BATANERO, C. (1998): Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En: A. Sierpiska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177–195). Dordrecht: Kluwer, A. P.
- GODINO J. D., CONTRERAS, A. y FONT V. (2004): Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (en revisión).
[http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf]
- SCHNEIDER M. (2001): Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques à propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21 (1.2) 7–56.
- WILHELMI M. R., GODINO J. D. y BENCOMO D. (2004 septiembre): Criterios de idoneidad de un proceso de instrucción matemática. *XVI Simposio Iberoamericano de Enseñanza de la Matemática*. Castellón: Universitat Jaume I y Real Sociedad Matemática Española.
- WILHELMI M. R. (2003): *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos*. Sección 2 : Tesis doctorales, n° 23. Pamplona, ESP: Universidad Pública de Navarra.