

# VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD MATEMÁTICA DE TAREAS

## Assessment of mathematic suitability of tasks

Vicenç Font y Marta Adán

Universitat de Barcelona

### Resumen

*En este trabajo se explica el diseño e implementación de un ciclo formativo para investigar el desarrollo de la competencia en análisis didáctico en un proceso de formación dirigido a futuros profesores de matemáticas. En particular se focaliza en el diseño de tareas que permitan la emergencia de herramientas teóricas para la valoración de la idoneidad matemática de una secuencia de tareas, uno de los componentes de dicha competencia.*

**Palabras clave:** *competencia en análisis didáctico, formación de profesores, tareas, idoneidad epistémica.*

### Abstract

*In this paper we describe the design and implementation of task sequences for the development of the competence in didactic analysis in the training of pre-service teachers of secondary school mathematics. In particular, our goal is the task design that promotes the emergence of theoretical tools for the assessment of mathematic suitability of a sequence of tasks, one component of this competence.*

**Keywords:** *competence in didactic analysis, teachers training, tasks, epistemic suitability.*

## INTRODUCCIÓN

Los currículos de secundaria por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Dicho problema lleva a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar las competencias, generales y específicas de matemáticas, prescritas en el currículum de secundaria? ¿Cómo desarrollarlas y evaluarlas? En nuestro caso, en el marco de dos proyectos de investigación (ver agradecimientos), estamos interesados en investigar, entre otros, los siguientes aspectos relacionados con estas preguntas:

- 1) Caracterizar competencias profesionales en la formación inicial del futuro profesor de matemáticas de secundaria, sus grados y descriptores.
- 2) Diseñar ciclos formativos para el desarrollo y evaluación de competencias profesionales del futuro profesor.

Estos aspectos se pueden vincular mediante el esquema de la figura 1 que muestra la relación que hay entre las tareas de un ciclo formativo y el desarrollo (y evaluación) de competencias profesionales. De acuerdo con este esquema, nos interesa analizar las prácticas de los profesores para resolver las tareas profesionales propuestas, y el conocimiento matemático-didáctico activado en ellas, para encontrar indicadores que justifiquen la asignación de grados de desarrollo de la competencia profesional que se pretende evaluar.

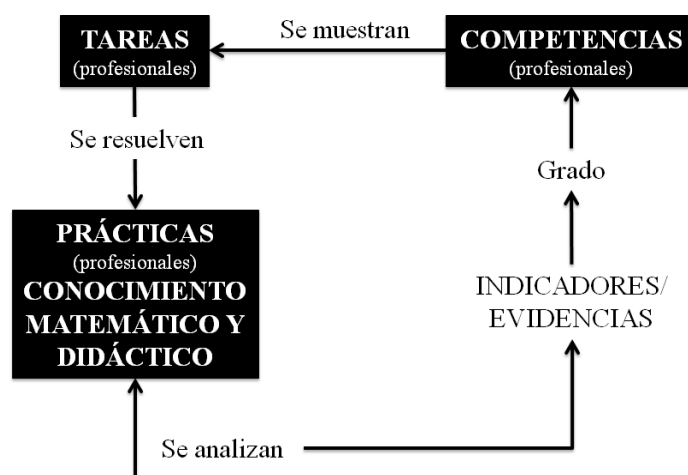


Figura 1. Evaluación y desarrollo de competencias profesionales.

En este trabajo se explica una parte del esquema de la figura 1 para investigar el desarrollo de la competencia en análisis didáctico en un proceso de formación dirigido a futuros profesores de matemáticas. En particular se focaliza en el diseño de tareas que permitan la emergencia de herramientas teóricas para la valoración de la calidad matemática del proceso de instrucción (entendida como una noción multidimensional que contempla aspectos como la falta de errores, la riqueza y relevancia de procesos matemáticos activados, la representatividad de la complejidad del objeto matemático que se enseña, etc.), uno de los componentes de dicha competencia.

## MARCO TEÓRICO

En este apartado comentamos los elementos teóricos que se han tenido en cuenta.

## **Competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción**

En la última década aumentó el interés por investigar el conocimiento y las competencias que necesitan los profesores de matemáticas para conseguir una enseñanza eficaz (Wilson, Cooney & Stinson, 2005; Hill, Blunk, Charambous, Lewis, Phelps, Sleep & Ball, 2008).

Entre las agendas de investigación que ponen el énfasis en las competencias que deben desarrollar los profesores para realizar procesos de instrucción de calidad hay que resaltar: 1) Las que consideran que el profesor debe desarrollar la competencia “mirar con sentido”; la cual le permite ver las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas (Mason, 2002), y 2) Las que se desarrollaron en el marco del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). En este enfoque se proponen cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de instrucción, cada uno de ellos con sus respectivas herramientas: a) Análisis de las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de instrucción. b) Análisis de objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas. c) Análisis de las interacciones realizadas en el proceso de instrucción. d) Identificación del sistema de normas y metanormas que regulan el proceso de instrucción. e) Utilización de criterios de idoneidad didáctica para la valoración del proceso de instrucción con el fin de mejorarlo. Este tipo de análisis didáctico tiene por objetivo que el profesor tenga instrumentos para describir, explicar, valorar y mejorar dichos procesos.

Estas investigaciones coinciden (o al menos no contradicen) en que una de las competencias profesionales que debe tener el profesor de matemáticas es la competencia en análisis didáctico de secuencias de tareas, que le permita su diseño, aplicación, valoración y mejora.

El desarrollo y evaluación de la competencia en análisis didáctico implica analizar las prácticas profesionales de los futuros profesores de secundaria de matemáticas para resolver las tareas profesionales propuestas, y el conocimiento matemático-didáctico activado en ellas, para encontrar indicadores que justifiquen la asignación de niveles de desarrollo a dicha competencia. En este esquema el diseño de tareas tiene un papel muy relevante.

### **Diseño de tareas**

Recientemente ha aumentado mucho el interés sobre el diseño de tareas al considerarlo un aspecto clave para conseguir una enseñanza de calidad. Este interés se manifestó en la creación, en el *The International Congress on Mathematics Education* del 2008, del *Topic Study Group, Research and development in task design and analysis*; y en la celebración de un *ICMI Study* específico sobre este tema en el año 2013, siendo uno de sus focos el diseño de tareas en la formación de profesores.

Las tareas son las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.) a los alumnos; éstas son el punto de partida de la actividad del alumno, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje. La investigación sobre el diseño de tareas se interesó por diferentes aspectos. Por ejemplo, Swan (2007) estudió la naturaleza y tipología de tareas; Charalambus (2010) el papel que tiene el profesor en la implementación de la tarea a fin de lograr un proceso cognitivo relevante en los alumnos; Giménez, Font y Vanegas (2013) en el diseño de tareas en la formación de futuros profesores de matemáticas de secundaria.

### **Calidad matemática**

Las reflexiones (e investigaciones) sobre la calidad matemática de los procesos de instrucción de las matemáticas son numerosas en el área de Educación Matemática. Todas ellas ponen de manifiesto que hay muchos aspectos que inciden sobre esta calidad y que, por tanto, se trata de una noción multidimensional. En este trabajo se han tenido en cuenta dos aproximaciones que si bien consideran la calidad matemática de una manera multidimensional ponen el acento, según nuestra opinión, en dimensiones diferentes. Por una parte, las que destacan como elemento central de la

calidad matemática el descriptor “riqueza matemática” y, por otra parte, las que toman como elemento central el descriptor “representatividad de las matemáticas enseñadas”.

Un ejemplo relevante del primer tipo de aproximaciones son los trabajos de Hill y colaboradores. Segons Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball (2008) se puede definir la calidad matemática de la instrucción como un compuesto de varias dimensiones que caracterizan el rigor y la riqueza de las matemáticas de la clase, incluyendo la presencia y ausencia de errores matemáticos, explicación y justificación matemática, representaciones matemáticas y observaciones relacionadas. Estos autores han desarrollado un sistema de categorías para medir la calidad matemática de la instrucción (Hill, 2010). Estas son: a) Formato del segmento, b) El trabajo en las clases está conectado a las matemáticas, c) La riqueza de las matemáticas, d) Trabajo con los estudiantes, e) Errores e imprecisiones en el lenguaje, f) Participación de los estudiantes. A su vez para cada categoría se tienen subcategorías. Por ejemplo, para la riqueza de las matemáticas, se tiene: 1) Explicaciones matemáticas, 2) Múltiples procedimientos o métodos de resolución, 3) El desarrollo de generalizaciones matemáticas, 4) El lenguaje matemático, 5) Riqueza de las matemáticas en general.

Un ejemplo relevante del segundo tipo de aproximaciones es el EOS, principal referente teórico de esta investigación. Este enfoque propone herramientas para, primero, describir las matemáticas implicadas en un proceso de instrucción y, segundo, valorar su calidad. Para la descripción propone herramientas que permiten analizar las prácticas matemáticas y los objetos primarios y procesos matemáticos activados en ellas. Para valorar la calidad de las matemáticas se propone el constructo “criterios de idoneidad”, en especial el criterio de idoneidad epistémica:

1. Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”.
2. Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.
3. Idoneidad interaccional, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.
4. Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
5. Idoneidad emocional, para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción.
6. Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc. (Font, Planas y Godino, 2010, p. 101)

Para cada una de las seis idoneidades hay un conjunto de indicadores. A continuación siguen los indicadores de la idoneidad epistémica: Muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), y traducciones y conversiones entre los mismos; procurando que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen; presentación de los enunciados y procedimientos básicos del tema y adecuando asimismo las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen; establecimiento de relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etc.

La noción de calidad epistémica propuesta por el EOS está muy centrada en la idea de representatividad de las matemáticas enseñadas con relación al significado holístico del objeto matemático que se quiere enseñar, entendido como el conjunto de pares (prácticas matemáticas, objetos primarios y procesos matemáticos activados en dichas prácticas). La determinación de dicho significado global u holístico requiere de la realización de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión. Así mismo se deben tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dichas configuraciones de objetos primarios.

## DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Se asume la siguiente caracterización de la competencia en análisis didáctico: *Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora*. Se considera, además: 1) que se pueden encontrar criterios e indicios del desarrollo de esta competencia (Font, 2011), y 2) que algunos de los constructos propuestos en el modelo de análisis didáctico que propone el EOS son útiles para el desarrollo de dicha competencia, sobre todo, el constructo criterios de idoneidad didáctica. En esta investigación se asume esta caracterización de la competencia en análisis didáctico y tomamos como hipótesis general de partida las dos consideraciones anteriores.

El objetivo es el diseño e implementación de un ciclo formativo que permita el desarrollo la competencia de análisis didáctico de procesos de instrucción, en particular, la valoración de calidad matemática. Nos planteamos pues el diseño (bien sea adaptando tareas ya diseñadas o bien haciendo un diseño propio de tareas), implementación y rediseño de tareas que permitan la emergencia de herramientas teóricas para que los futuros profesores realicen la valoración de la calidad matemática de procesos de instrucción propios o ajenos, desarrollando de esta manera uno de los componentes de dicha competencia. Para conseguirlo, utilizamos una metodología de investigación que tienen elementos de la investigación basada en el diseño. Estos son: (1) estudiar la adquisición de competencias en un ambiente real, (2) tener por objetivo generar ambientes de aprendizaje eficaces novedosos, (3) la colaboración entre la investigadora y los profesores y (4) la búsqueda simultánea de la construcción de teorías y la innovación de la práctica (Cobb, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003). Por otra parte, para el caso en que las tareas sean de diseño propio, se utiliza una metodología de estudio de caso, especialmente para aquéllas que impliquen el estudio exhaustivo del contexto en el que se desarrolló el episodio seleccionado.

Los sujetos participantes son los futuros profesores de matemáticas de secundaria del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona. Los datos para la investigación se obtienen, sobre todo, de: a) Registros de la plataforma virtual; b) Registros audiovisuales de episodios de clases implementados en el máster y c) de su Trabajo Final de Máster donde se realiza una valoración de la calidad matemática de la unidad didáctica que implementaron en su periodo de prácticas..

Nos planteamos pues una investigación que permita relacionar herramientas teóricas ya desarrolladas por programas de investigación en educación matemática (en este caso, sobre todo el EOS) con la práctica profesional del futuro profesor de matemáticas de secundaria, lo cual sirve, entre otras cosas, para desarrollar y precisar dichas herramientas. Se trata, por tanto, de una investigación experimental que permite el desarrollo de elementos teóricos.

## EJEMPLO DE TAREA

A continuación, se explica el diseño y la implementación de una tarea de este ciclo. Se ha seleccionado una de las tareas de diseño propio. Se trata de la tarea inicial del ciclo y su objetivo es crear un debate en el que se espera la emergencia de criterios relacionados con la noción de calidad matemática como, por ejemplo: representatividad, riqueza de procesos, adaptación curricular, complejidad del objeto matemático, etc. Cabe destacar que esta tarea debe realizarse antes de que los alumnos estudien estos conceptos, el objetivo es que surjan de manera espontánea en el propio debate.

La tarea se presenta como uno de los primeros problemas profesionales que tuvo una alumna del máster del curso 2010-2011 en su primera experiencia profesional. Esta alumna fue contratada como profesora substituta de un profesor que debía explicar las integrales en el segundo de

bachillerato. En concreto tuvo que poner en funcionamiento su conocimiento común del contenido para poder resolver las tareas sobre integrales del libro de texto, pero también se topó con una problemática relacionada con otros componentes del conocimiento matemático para la enseñanza (conocimiento especializado, conocimiento del currículo, etc.). En concreto se encontró que el profesor a quien sustituía había diseñado una prueba en formato digital para preparar el examen del tema de integrales y ella no tenía muy claro si la prueba era adecuada o no. No tenía claro que este cuestionario sirviese para evaluar los elementos fundamentales del tema.

El cuestionario era voluntario y estaba dirigido a aquellos alumnos que querían repasar los contenidos susceptibles de entrar en el examen sobre integrales. Las características principales del cuestionario eran: 1) se tenía que realizar en un entorno digital soportado por dos plataformas virtuales: Moodle y Wiris (calculadora simbólica virtual), 2) el temario abarcado era: Integral definida, Integral indefinida y Cálculo de áreas, 3) las preguntas eran abiertas (no era un test) y los alumnos debían introducir su respuesta mediante la calculadora Wiris, 4) la generación de preguntas era aleatoria. Había un banco de preguntas y cada intento del cuestionario generaba, mediante la calculadora Wiris, preguntas con datos numéricos diferentes. 5) El cuestionario producía como retroalimentación, en el caso de que el alumno fallase la respuesta, una respuesta correcta (que para el cálculo de áreas detallaba todos los pasos). La figura 2 es un ejemplo de las pantallas del cuestionario que aparecían en el ordenador del alumno, mientras que la figura 3 es un ejemplo gráfico de la retroalimentación aportada por el cuestionario al dar el alumno una respuesta incorrecta.

En la primera fase de la implementación de esta tarea se daba toda esta información (incluido el acceso al cuestionario digital), junto a lo que decía el currículo sobre el tema de integrales (en especial los criterios de evaluación) y la parte del índice sobre la integral del libro de texto utilizado. A los futuros profesores se les pedía que, primero en pequeños grupos y después en gran grupo, discutieran sobre la siguiente consigna abierta *¿Podrías valorar si el cuestionario digital tiene calidad matemática o no? Justifica tu respuesta.* El resultado de la discusión fueron dos criterios: 1) adaptación del cuestionario a los criterios de evaluación, 2) tener en cuenta la complejidad de la integral.

En la segunda fase de la implementación de esta tarea el profesor limitó el criterio “adaptación al currículo” al componente “riqueza de procesos matemáticos” ya que, dado que el currículo estaba pensado para el desarrollo de procesos, esta idea era uno de los criterios de evaluación. Después reelaboró el criterio “tener en cuenta la complejidad de la integral” en términos de “representatividad” y conectó ambos criterios haciendo ver que se podían considerar como dos componentes de la noción “calidad matemática”. A continuación se dieron más indicadores para poder medir estas dos componentes.

Con relación a valorar si el cuestionario era representativo de la complejidad de la integral se explicaron los siguientes significados de “integral” (Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010): 1) Geométrico, 2) Resultado de un proceso de cambio, 3) Inversa de la derivada, 4) Aproximación al límite: 5) Generalizada: (Lebesgue, Riemann, etc.), 6) Algebraica, 7) Métodos numéricos. Después, en una hoja de trabajo específicamente diseñada, el alumno, para cada una de las 10 preguntas del cuestionario digital y para cada uno de los 7 significados parciales, tenía que escribir en una tabla un 1 o un 0 según considerase que la pregunta activaba (o no) dicho significado. Con relación a la “riqueza de procesos matemáticos” el profesor se limitó a considerar los siguientes: Contextualización, Algoritmización, Comunicación, Argumentación y Resolución de problemas. Después el alumno para cada una de las 10 preguntas del cuestionario digital y para cada uno de estos 5 procesos tenía que escribir un 1 o un 0 según considerase que la pregunta activaba (o no) dicho proceso.

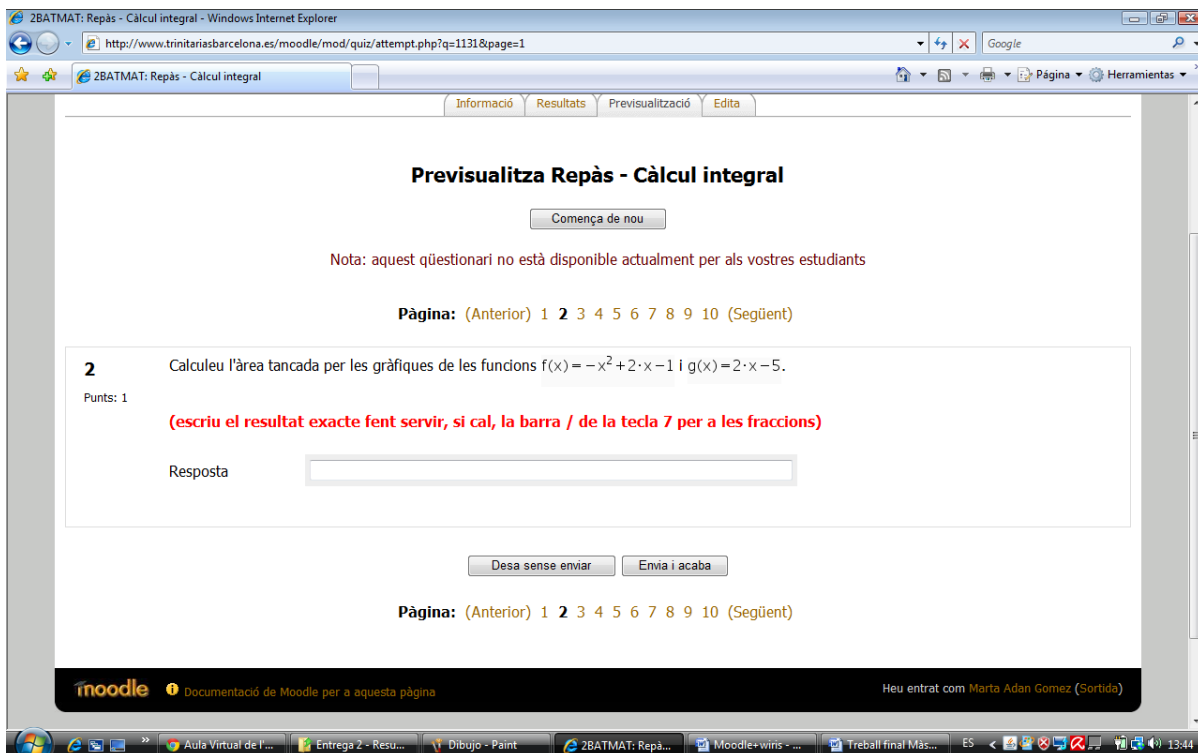


Figura 2. Ejemplo de las pantallas del cuestionario

La conclusión de los futuros profesores, tal como se esperaba, fue que el cuestionario no era representativo de la complejidad del objeto integral ya que solo activaba dos de los siete significados posibles de la integral y que, además, no activaba procesos relevantes (resolución de problemas, contextualización comunicación y argumentación). La conclusión que se consensuó, después de la discusión en el gran grupo, fue (1) que calidad matemática del cuestionario era baja y, además, no era causada por las características del entorno digital y (2) que se podía argumentar mediante elementos relativamente objetivos el nivel de calidad matemática del cuestionario.

## CONSIDERACIÓN FINAL

La mirada compleja sobre los objetos matemáticos, como la que realiza el EOS, lleva a pensar no en un objeto simple sino en un sistema complejo formado por partes o componentes. La idea de representatividad, como criterio de calidad matemática de una secuencia de tareas, es una consecuencia de esta mirada compleja y de ella se derivan otros criterios que están relacionados con la articulación de los elementos en los que se descompone la complejidad, como son los de conexión y coherencia. Precisamente la noción de conexión se puede utilizar como puente entre los dos principales criterios de calidad matemática considerados en nuestra investigación (representatividad y riqueza de procesos matemáticos) ya que en los principios y estándares del NCTM (2000) se propone como un proceso importante el proceso de conexión – eso sí, entendido más como la articulación entre diferentes partes de las matemáticas que como conexión de las matemáticas con la realidad extramatemática.

2 Calculeu l'àrea tancada per les gràfiques de les funcions  $f(x) = -x^2 + 2 \cdot x - 1$  i  $g(x) = 2 \cdot x - 5$ .

Punts: 1

(escriu el resultat exacte fent servir, si cal, la barra / de la tecla 7 per a les fraccions)

Resposta  X

Troba els punts de tall entre les funcions resolent l'equació  $f(x) = g(x)$ :

$$\begin{aligned} -x^2 + 2 \cdot x - 1 &= 2 \cdot x - 5 \\ -x^2 + 2 \cdot x - 1 - (2 \cdot x - 5) &= 0 \\ -x^2 + 4 &= 0 \\ x_1 &= -2 \text{ i } x_2 = 2 \end{aligned}$$

Calcula una primitiva de  $h(x) = f(x) - g(x)$ :

$$H(x) = \int h(x) \cdot dx = \int (-x^2 + 4) \cdot dx = -\frac{1}{3} \cdot x^3 + 4 \cdot x$$

Aplica Barrow per a calcular l'àrea:

$$A = \left| \int_{-2}^2 h(x) \cdot dx \right| = |H(2) - H(-2)| = \frac{32}{3} \approx 10.67$$

Fes un comentari o canvia la qualificació

Incorrecta  
Resposta correcta: 10.66  
Punts d'aquesta tramesa: 0/1.

Pàgina: (Anterior) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 (Següent)

Figura 3. Ejemplo gráfico de retroalimentación

## Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los siguientes proyectos de investigación REDICE-12-1980-02 y EDU2012-32644.

## Referencias

- Charalambous, C. Y. (2010). Mathematical knowledge for teaching and tasks. *Journal of Teacher Education*, 60(1-2), 21-34.
- Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Contreras, A., Ordóñez, L., y Wilhemí, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, 28(3), 2010.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, 26, 9-25.



- Font, V., Planas, N., y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105.
- Giménez, J., Font, V., y Vanegas, Y. (2013). *Professional Tasks analyzing school mathematical practices*. Comunicación aceptada para su presentación en el ICMI Study 22.
- Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Hill, H. C. (2010). Mathematical Quality of Instruction (MQI) (Manuscrito no publicado). *Learning Mathematics for Teaching*. Universitat de Michigan.
- Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. The Council: Reston, Virginia.
- Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: a design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 217-237.
- Wilson, P. S., Cooney, T. J., & Stinson, D. W. (2005). What constitutes good mathematics teaching and how it develops: Nine high school teachers' perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(2), 83-111.