http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n2p1

# Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada

(Primera parte)

# Desenho e aplicação de um instrumento para explorar a faceta epistêmica do conhecimento didático-matemático de futuros professores sobre a derivada

(Primeira parte)

Luis R. Pino-Fan[1]
luispino23@gmail.com

Juan D. Godino[2]
jgodino@ugr.es

Vicenç Font[3]
vfont@ub.edu

**Resumen**

El presente artículo es el primero de dos artículos vinculados en los cuales presentamos los resultados de una investigación durante la cual se diseñó y aplicó un instrumento para explorar y caracterizar una de las facetas del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de futuros profesores de secundaria/bachillerato. En esta primera parte se presenta el proceso de diseño del instrumento, abordando tanto las consideraciones teóricas y metodológicas contempladas para su diseño, como las características y conocimientos que se pretenden con cada una de las tareas que lo conforman. El instrumento resultante puede significar un aporte para los formadores de profesores que deseen explorar y potenciar la faceta del conocimiento sobre la derivada que aquí abordamos. La metodología empleada se prevé como una metodología pertinente para aquellos interesados en el diseño de instrumentos orientados a explorar aspectos del conocimiento didáctico-matemático de los profesores.

**Palabras clave:** Formación de profesores. Conocimiento del profesor. Conocimiento didáctico-matemático. Diseño de cuestionario. Enfoque onto-semiótico. Derivada.

[1] Dr. en Didáctica de las Matemáticas.
[2] Catedrático de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada, España.
[3] Profesor Titular de la Universitat de Barcelona, España.

**Resumo**

O presente artigo é o primeiro de dois artigos vinculados nos quais apresentamos os resultados de uma investigação durante a qual se desenhou e implementou um instrumento para explorar e caracterizar uma das facetas do conhecimento didático-matemático acerca da derivada de futuros professores do ensino secundário/bacharelado. Na primeira parte apresenta-se o processo de desenho do instrumento, abordando tanto os aspectos teóricos e metodológicos contemplados para seu desenho, como as características e conhecimentos que se pretendem com cada uma das tarefas que o conformam. O instrumento resultante pode significar uma contribuição para os formadores de professores que desejam explorar e potencializar a faceta do conhecimento sobre a derivada que aqui abordamos. A metodologia empregada se antevê como uma metodologia relevante para aqueles interessados no desenho de instrumentos orientados a explorar aspectos do conhecimento didático-matemático dos professores.

**Palavras-chave:** Formação de professores. Conhecimento do professor. Conhecimento didático-matemático. Desenho de questionário. Enfoque ontossemiótico. Derivada.

# 1. Introducción

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituye un campo de investigación que ha llamado la atención, desde hace décadas, tanto de la comunidad de investigadores en Didáctica de las Matemáticas, como de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y competencias matemáticas de los estudiantes dependen esencialmente de los conocimientos, competencias, habilidades, de sus profesores. Muestra del creciente interés que se le ha otorgado a este tema, queda reflejado en el incremento notable de investigaciones sobre la formación de profesores de matemáticas incluidas en los "handbooks" de investigación en educación matemática (Bishop et. al., 2003; English et al., 2002; Llinares y Krainer, 2006; Hill y cols, 2007; Franke y cols, 2007; Sowder, 2007), y en la publicación de revistas específicas como el Journal of Mathematics Teacher Education.

Una de las problemáticas que ha generado un gran interés, es la identificación del conocimiento didáctico-matemático requerido por los futuros profesores para la enseñanza de las matemáticas. En este sentido, una gran cantidad de investigaciones han sido orientadas a la identificación de los componentes del complejo de conocimientos que un profesor debería tener con el fin de desarrollar eficientemente su práctica y así, facilitar el aprendizaje de sus estudiantes. Por ejemplo, los trabajos de Shulman (1986, 1987), Fennema y Franke (1992) y Ball (2000), muestran una visión multifacética sobre la construcción de los conocimientos requeridos para la enseñanza. Investigaciones más recientes tales como las de Ball, Lubienski y Mewborn (2001), Hill, Schilling y Ball (2004), Ball, Hill y Bass (2005), Llinares y Krainer (2006), Ponte y Chapman (2006), Philipp (2007), Sowder (2007), Ball, Thames y Phelps (2008), Hill, Ball y Schilling (2008), Sullivan y Wood (2008), Ball y Bass (2009), nos muestran que no existe un acuerdo universal sobre un marco teórico para describir el conocimiento de los profesores de matemáticas (Rowland y Ruthven, 2011).

En las investigaciones referidas anteriormente, enmarcadas en el campo de investigación de Didáctica de las Matemáticas, se realizan diversas propuestas de modelos que tratan de determinar y describir los elementos que componen el conocimiento que los profesores de matemáticas. La cuestión inmediata que surge a partir de la diversidad de modelos del conocimiento del profesor planteados es, ¿cómo determinar tal conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada tomando como referencia modelos que incluyen categorías demasiado "globales" y hasta cierto punto disjuntas? Y es que a pesar de los avances que suponen los modelos propuestos para la caracterización de los conocimientos que requieren los profesores de matemáticas para la enseñanza efectiva de tópicos concretos como el de la derivada, aún no se disponen de *criterios que permitan analizar y reconocer con profundidad* dichos conocimientos, criterios que posteriormente orienten a los investigadores y formadores de profesores mediante pautas para el desarrollo y potenciación de estos conocimientos.

El presente artículo es el primero de dos artículos vinculados en los cuales presentamos los resultados de una investigación de cuatro años, durante los cuales hemos tratado de avanzar y realizar aportes sobre la identificación de criterios y pautas que permitan analizar y caracterizar el conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores. Para ello se diseñó y aplicó un instrumento, con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático (modelo CDM) propuesto en el marco del Enfoque Onto-Semiótico (Godino, 2009; Godino y Pino-Fan, 2013), para explorar y caracterizar aspectos relevantes de los conocimientos didáctico-matemáticos sobre la derivada de futuros profesores de secundaria/bachillerato. Debido a la amplitud y la dificultad que conllevaría explorar cada una de las facetas y componentes del conocimiento de los futuros profesores de bachillerato sobre el objeto derivada, nos propusimos realizar una primera aproximación a dicho conocimiento mediante la exploración de una de las facetas clave en el CDM: la *faceta epistémica*.

La faceta epistémica incluye, en congruencia con el modelo de Ball y colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008) tres tipos de conocimiento: conocimiento común del contenido, aspectos del conocimiento especializado del contenido y conocimiento ampliado del contenido. En este artículo presentamos el proceso de diseño del instrumento, abordando tanto las consideraciones teóricas y metodológicas contempladas para su diseño, como las características y conocimientos que se pretenden con cada una de las tareas que lo conforman. Primeramente se describe y discute el diseño de la versión “piloto” del instrumento. Con base en los resultados obtenidos de la “aplicación piloto” y del estudio de la valoración emitida por expertos en didáctica del cálculo diferencial, se presenta y describe la versión definitiva del instrumento, presentando un análisis a priori de los conocimientos esperados por cada una de las tareas que lo componen.

## 2. Marco teórico y metodológico

El análisis didáctico de los procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos se realiza en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática, distinguiendo en los mismos seis facetas o dimensiones: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica (Godino, Batanero y Font, 2007). Para cada faceta se distinguen distintas componentes y se han desarrollado diversas herramientas que permiten su análisis. En este trabajo tenemos en cuenta la faceta epistémica del análisis didáctico basado en el EOS. La faceta epistémica de un proceso de estudio matemático refiere a los significados institucionales puestos en juego en cada una de las fases de dicho proceso (preliminar, diseño, implementación y evaluación). Tales significados son interpretados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos.

En Godino (2009) se han aplicado estas herramientas de análisis didáctico para elaborar un sistema de categorías de los conocimientos del profesor de matemáticas que designa como modelo de *Conocimiento Didáctico-Matemático* (CDM). Cuando el foco de atención son los conocimientos que el profesor de matemáticas debe poner en juego como organizador y gestor de un proceso de enseñanza y aprendizaje tales conocimientos incluyen los relativos a cada una de las seis facetas implicadas en tales procesos. Así, cuando se habla de la faceta epistémica del CDM se refiere al conocimiento que tiene o debe tener el profesor sobre el contenido matemático como objeto institucional cuya enseñanza se planifica, implementa o evalúa.

Esta modelización de los conocimientos del profesor de matemáticas es la que hemos utilizado para diseñar un cuestionario cuyo objetivo es la evaluación de los conocimientos de una muestra de futuros profesores de Bachillerato sobre la derivada, restringida tal evaluación a aspectos relevantes de la faceta epistémica de dichos conocimientos. Una evaluación más completa requeriría elaborar varios instrumentos que cubrieran los diferentes aspectos del tema, lo cual no formaba parte de nuestros objetivos.

Los supuestos antropológicos y ontosemióticos en los cuales se basa el EOS, y las herramientas analíticas elaboradas, proporcionan criterios para caracterizar el tipo de conocimiento especializado sobre el contenido que debe tener el profesor de matemáticas para una enseñanza de alta idoneidad epistémica. En primer lugar, la relatividad institucional y personal de los significados de los objetos matemáticos conlleva que el profesor de matemáticas conozca la pluralidad de tales significados, según los marcos institucionales y contextos de uso, la diversidad de configuraciones de objetos y procesos inherentes a tales significados y las necesarias articulares entre los mismos.

En las investigaciones sobre formación de profesores de matemáticas está recibiendo una atención especial el modelo conocido como MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) desarrollado por Ball y colabores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008). En este modelo, para el conocimiento relativo al contenido matemático –que se corresponde con la faceta epistémica en el modelo CDM–, se distinguen tres categorías de conocimiento, común, en el horizonte matemático y especializado. Este desglose lo consideramos útil en el diseño de planes de formación de profesores de matemáticas, aunque no deja de ser conflictivo como señalan diversos trabajos presentados en el grupo "From a study of teaching practices to issues in teacher education" del CERME 8.

En nuestro caso, para los profesores de Bachillerato, interpretamos el *conocimiento común* como el conocimiento del contenido (e.g., la derivada) que las orientaciones curriculares y libros de texto proponen para el Bachillerato. Cualquier conocimiento sobre la derivada que no se pretenda en dicho nivel, sino para otros cursos universitarios, lo consideramos como *conocimiento ampliado* (o en el horizonte matemático). Es claro que el profesor de matemáticas de Bachillerato deberá tener además del conocimiento común una cierta dosis de conocimiento ampliado. Tanto sobre del conocimiento común como sobre del ampliado el profesor deberá tener un *conocimiento especializado*.

Ahora bien, ¿cuál es la naturaleza de este conocimiento especializado? Una respuesta operativa a esta cuestión la podemos encontrar en el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), planteado inicialmente en Godino (2009) y afinado en Godino y Pino-Fan (2013), el cual propone que el conocimiento especializado debe incluir la pluralidad de significados del objeto, la diversidad de configuraciones de objetos y procesos inherentes a tales significados y las necesarias articulares inherentes entre los mismos. Así, el modelo CDM (Godino 2009, Godino y Pino-Fan, 2013) propone tres categorías globales de conocimiento sobre el contenido matemático, categorías que, si bien son similares a las del MKT, reestructuran y redefinen su nociones. Estas categorías son: 1) *conocimiento común del contenido*; 2) *conocimiento ampliado del contenido*; y 3) *conocimiento especializado*, el cual incluye a su vez cuatro subcategorías a saber: 3.1) *conocimiento del contenido especializado*; 3.2) *conocimiento del contenido en relación con los estudiantes*; 3.3) *conocimiento del contenido en relación con la enseñanza;* y 3.4) *conocimiento del contenido en relación con el currículo y el contexto* en el que se desarrolla la práctica de enseñanza y aprendizaje.

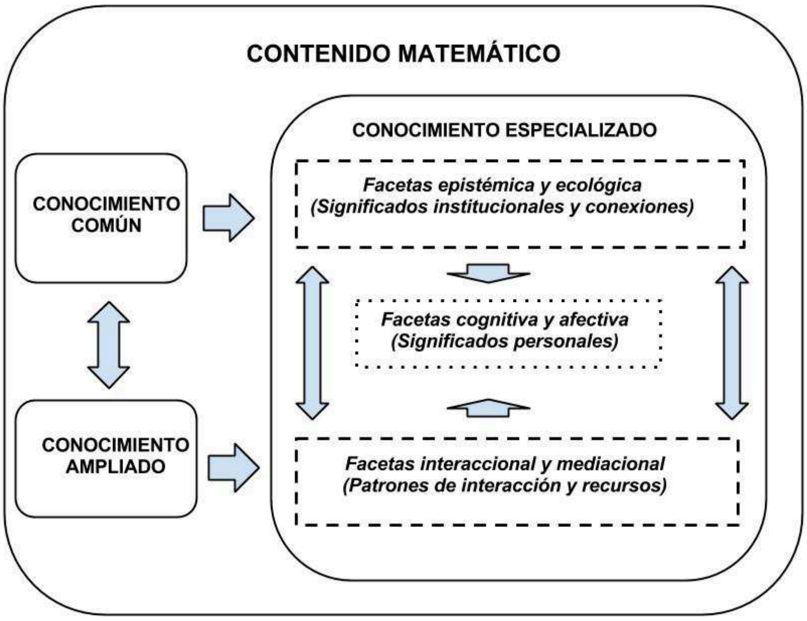
La aplicación de las herramientas analíticas del EOS, en particular la noción de configuración de objetos y procesos (en nuestro caso utilizaremos esta noción en su versión epistémica), permite indagar con más detalle los elementos constituyentes de las categorías 1) conocimientos común del contenido; 2) conocimiento ampliado del contenido; y 3.1) conocimiento del contenido especializado. Las otras categorías se operativizan y analizan con las herramientas teóricas y metodológicas proporcionadas por el EOS para cada una de las siguientes facetas (Figura 1): 3.2) conocimiento del contenido-estudiantes (facetas cognitiva y afectiva); 3.3) conocimiento del contenido-enseñanza (facetas interaccional y mediacional); y 3.4) conocimiento del contenido-currículo-contexto (facetas ecológica y epistémica).

Son seis los objetos matemáticos primarios que conforman una configuración[4] de objetos a saber: problemas, elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos). Entonces una configuración epistémica es el sistema de objetos matemáticos primarios que, desde el punto de vista institucional, están involucrados en las prácticas matemáticas llevadas a cabo para

[4] En el EOS las configuraciones de objetos matemáticos primarios pueden ser vistas desde un punto de vista institucional (configuración epistémica) o personal (configuración cognitiva).

resolver un problema específico. Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy (2011) señalan que los objetos matemáticos primarios, pueden ser analizados desde una perspectiva proceso–producto, lo que conlleva a considerar los procesos de Institucionalización – Personalización, Generalización – Particularización, Descomposición/Análisis – Composición/Reificación, Materialización – Idealización, Representación – Significación. En una práctica matemática, existen procesos que cobran más relevancia que otros. En nuestro estudio hemos considerado los procesos pertinentes a cada tarea contenida en el instrumento diseñado.

**Figura 1 –** Componentes del Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)




El modelo ontológico y epistemológico propuesto por el EOS pone de manifiesto la complejidad inherente de los conocimientos institucionales y personales involucrados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Como resultado de esta complejidad, se requiere de una variedad de instrumentos para evaluar los diferentes aspectos del conocimiento didáctico-matemático que los profesores de matemáticas necesitan comprender y dominar con el fin de ofrecer una instrucción eficaz. Como lo hemos mencionado, el presente estudio se centra en aspecto clave de la faceta epistémica del CDM de futuros profesores en relación a un objeto matemático específico, la derivada. Con este fin, hemos desarrollado el instrumento que se describe en las siguientes secciones. En el apartado 3 abordamos las fases del diseño del instrumento y en la sección 4 las características de cada una de las tareas que se contemplaron en el cuestionario.

## 3. Diseño del instrumento

En este apartado describimos cada una de las fases que se siguieron para el desarrollo de un cuestionario al que hemos denominado *FE-CDM-Derivada*. Este cuestionario se pensó para una muestra de futuros profesores de matemáticas quienes en su historial académico, hayan cursado materias de análisis matemático (cálculo diferencial, cálculo integral, ecuaciones diferenciales, cálculo vectorial,…) y sobre la didáctica de las matemáticas (didáctica del cálculo, desarrollo conceptual, teorías del aprendizaje, …). En el segundo artículo se describirán las características específicas de la población a la que se le aplicó finalmente el instrumento.

Los resultados obtenidos en cada una de las fases también se presentan y discuten en los siguientes sub-apartados.

### *3.1. Fases del diseño*

*Fase 1. ¿Qué es la derivada? ¿Cuáles son sus significados?*

Si nuestra intención es explorar el Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) de los futuros profesores sobre un objeto matemático concreto, en nuestro caso la derivada, una pregunta inherente que surge de manera inmediata a nuestro estudio es *¿qué es la derivada?*, es decir, *¿cuáles son sus significados?* Responder a estas preguntas es primordial si lo que se quiere es comprender lo que conocen los futuros profesores sobre dicho objeto matemático. Conocer el significado holístico de los objetos matemático es de suma importancia puesto que es a partir de dicho significado que la institución y/o el profesor, como representante de la institución educativa, determina cuál o cuáles serán los significados pretendidos, los efectivamente implementados y los evaluados, en el proceso de instrucción de un tópico matemático específico. La determinación de dicho significado global u holístico requiere de la realización de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, en nuestro caso concreto, sobre el origen y la evolución de la derivada (Pino-Fan, Godino y

Font, 2011). Así mismo se deben tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto matemático.

Así, como primer paso para el diseño del cuestionario, desarrollamos un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y la evolución de la derivada, el cual nos permitió realizar la reconstrucción de su significado holístico. Nuestro esfuerzo por la reconstrucción de un significado global para la derivada, ha resultado en la identificación de nueve sistemas de prácticas los cuales llevan asociados, cada uno a su vez, una configuración epistémica y constituyen un significado parcial de la derivada. A estas nueve configuraciones, respectivamente asociadas a los sistemas de prácticas, las hemos denominado[5]: 1) la tangente en la matemática griega; 2) sobre la variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) el cálculo de fluxiones; 8) el cálculo de diferencias, y 9) la derivada como límite. Nuestra propuesta de reconstrucción del significado global de la derivada resulta especialmente importante puesto que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico, requieren un estudio en profundidad sobre el significado de los objetos matemáticos que componen dicho contenido. Tal estudio debe aportar criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los planes y procesos de formación, según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirigen.

*Fase 2. Estudio de la literatura en didáctica del cálculo diferencial*

Un segundo paso necesario para la especificación de criterios que nos ayuden a seleccionar las tareas que compondrán nuestro cuestionario es el estudio de qué es lo que nos aportan las investigaciones realizadas en el campo específico de didáctica del cálculo. De esta forma, mediante un estudio de la literatura se evidenció que la *derivada* es uno de los conceptos fundamentales para el estudio del cálculo, pero frecuentemente el tratamiento que se le da a este concepto en la institución escolar, se enfoca al manejo y aplicación de fórmulas y recursos algebraicos, lo que puede provocar en los

[5] Un análisis detallado de los sistemas de prácticas y la descripción de las configuraciones epistémicas que de ellas emergen y que dan paso a estos nueve significados de la derivada, puede encontrarse en Pino-Fan, Godino y Font (2011).

estudiantes dificultades para la comprensión de este concepto. Esto es señalado por Artigue (1995), cuando advierte que aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para que los estudiantes logren alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro de este campo de las matemáticas.

En general, la *derivada*, ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos, tipos de errores…) e instruccionales (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada), tal y como se muestra en Artigue, Batanero y Kent (2007) o en Sánchez, García y Llinares (2008). Nuestro estudio de las aportaciones que se tienen en el campo de investigación de la educación matemática referentes a la problemática que conlleva la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, los organizamos en tres grandes bloques: 1) estudios sobre los aspectos epistémicos que dificultan el aprendizaje de la derivada; 2) estudios que versan sobre el tipo de representaciones idóneas para la enseñanza y el aprendizaje de la derivada; y 3) estudios sobre el impacto que tienen los aspectos discursivos en la enseñanza y aprendizaje de la derivada.

Para el diseño de nuestro estudio son de relevancia las aportaciones realizadas en los bloques 1 y 2. Como resumen de estos dos bloques podemos mencionar a Font (2008) quien señala que el interés por buscar alternativas a la definición de la función derivada por límites que presenten menos complejidad semiótica que ésta, le llevó a plantearse la cuestión sobre cómo conseguir la emergencia de $f'(x)$ a partir de $f(x)$, la cual se concreta en cómo calcular $f'(x)$ a partir de $f(x)$. Font (1999) considera que las diferentes representaciones ostensivas de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para la comprensión y, por tanto, para la enseñanza y aprendizaje de la derivada. Así, de acuerdo con Font, el cálculo de $f'(x)$ a partir de $f(x)$ en el aula, se puede interpretar como un proceso en el que, a su vez, se han de considerar tres subprocesos:

1. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$.
2. El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f^{'}(x)$.
3. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f^{'}(x)$.

De esta forma, entender el cálculo de la función derivada como un proceso en el que intervienen tres subprocesos, en cada uno de los cuales se pueden utilizar diferentes representaciones, permite ampliar el “abanico” de técnicas de cálculo de la función derivada que no se restrinja al cálculo por límites o al uso de reglas de derivación. Font (2008) señala que dichas técnicas pueden ser sugeridas por las posibilidades de los graficadores de funciones, la historia de las matemáticas, etc.; y que la incorporación de graficadores en la enseñanza de la derivada produce efectos metafóricos que condicionan la comprensión de los alumnos, por lo que se deberían contemplar, además de las representaciones, otros aspectos tales como las metáforas y las argumentación utilizadas en el discurso de los profesores y alumnos, para estructurar dicha comprensión.

*Fase 3. Elaboración de un banco de tareas sobre derivadas*

Una vez concluidas las fases 1 y 2, nos propusimos una vez más revisar la literatura en busca de tareas contempladas en las investigaciones sobre didáctica del cálculo y así, construir un banco de tareas sobre derivadas. Nuestro banco contó con 54 tareas, todas ellas abordadas en diversas investigaciones. Sin embargo, nuestro instrumento no podía ser demasiado pretencioso, por lo que habría que determinar criterios para la selección de las tareas que finalmente conformarían el cuestionario.

*Fase 4. Criterios para la selección de tareas*

La primera versión del instrumento (versión piloto), que hemos denominado *Cuestionario sobre la Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de la Derivada (Cuestionario FE-CDM-Derivada)*, constó de 11 tareas y fue diseñado con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino descrito en la sección 2. Como vimos, dicho modelo propone pautas para categorizar y analizar los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor mediante la aplicación del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007).

Con base en los resultados de las fases anteriores, en el proceso de construcción del cuestionario se consideraron tres criterios para la selección de las tareas que lo conforman. El primer criterio considera que las tareas deben proporcionar información sobre el grado de ajuste del significado personal de los futuros profesores respecto del significado global u holístico del objeto derivada (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Para lograrlo, se incluyeron ítems que activan distintos sentidos para el objeto derivada (pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio y tasa instantánea de variación). El segundo criterio fue que los ítems seleccionados respondan a los diferentes tipos de representaciones activadas en los tres subprocesos, que según Font (1999), intervienen en el cálculo de la función derivada:

1. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$
2. El paso de una representación de $f(x)$ a una forma de representación de $f^{'}(x)$
3. Traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f^{'}(x)$

En este sentido, las tareas incluidas en el cuestionario ponen en juego los diferentes tipos de representaciones que intervienen en estos tres subprocesos: descripción verbal, gráfica, fórmula (simbólica) y tabular; tanto para la función como para su derivada.

El tercer criterio, que se refiere al conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores, considera la inclusión de tres tipos de tareas: (1) aquellas que piden poner en juego el *conocimiento común* (resolver la tarea matemática propia de las matemáticas de bachillerato); (2) aquellas que requieren de aspectos relevantes del *conocimiento especializado* relacionado con el contenido matemático (usar distintas representaciones, distintos significados parciales de un objeto matemático, resolver el problema mediante diversos procedimientos, dar diversas argumentaciones válidas, identificar los conocimientos puestos en juego durante la resolución de una tarea matemática, etc.); y (3) aquellas que requieren del *conocimiento ampliado* (generalizar tareas sobre conocimiento común o realizar conexiones con objetos matemáticos más avanzados en el currículo).

De esta forma, y dada la complejidad que tiene el planteamiento de una tarea que satisfaga o evalúe los tres criterios descritos anteriormente al mismo tiempo, las tareas fueron seleccionadas de tal manera que, a lo largo del cuestionario *FE-CDM-Derivada*, las tareas se complementaban para evaluar dichos criterios.

*Fase 5. Análisis a priori de las tareas*

Una vez seleccionadas las 11 tareas, y antes de aplicar el cuestionario, se realizó un análisis pormenorizado de los contenidos y conocimientos que se evalúan con cada una de ellas[6]. El análisis a priori, o análisis epistémico en términos de nuestro marco teórico, consistió en la solución de las 11 tareas y encontrar la mayor cantidad de soluciones plausibles a cada una de ellas. Una vez halladas estas soluciones, se realizó el análisis detallado del contenido evaluado por cada tarea mediante un análisis "ontosemiótico" (Godino 2002) el cual se obtuvo mediante la aplicación de las herramientas presentadas en la sección 2, concretamente, los tipos de objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos), sus significados y los procesos involucrados en las prácticas matemáticas.

Cabe destacar que las soluciones plausibles de las tareas, fueron encontradas tanto por los autores de este artículo como por tres investigadores invitados, del área de didáctica del cálculo, ajenos a esta investigación.

*Fase 6. Aplicación piloto y evaluación de expertos*

Realizado el análisis a priori de la primera versión del cuestionario ("versión piloto"), se aplicó a una muestra de 53 futuros profesores de bachillerato en una universidad en México. Estos futuros profesores cumplían con las características deseables descritas al principio de la sección 3. Los resultados de esta aplicación se mostrarán con detalle en la segunda parte de este artículo, dado que aquí pretendemos discutir sobre el diseño y las características epistémicas de las tareas. Sin embargo, en la siguiente sección (3.2) sí daremos unos detalles relevantes que contribuyeron a la construcción de la "versión final" del mismo.

Paralelamente, a la aplicación de la primera versión del cuestionario, o "aplicación piloto", se realizó un estudio mediante el juicio de 8 expertos. En esta investigación consideramos "experto" a un investigador en el área, en nuestro caso didáctica del cálculo, con una trayectoria considerable reflejada en investigaciones publicadas en revistas de impacto.

A partir de los resultados de estos dos estudios, análisis de los resultados obtenidos de la primera aplicación del cuestionario y estudio de la valoración de los expertos, se modificó el cuestionario obteniendo la "versión final". En el siguiente apartado, 3.2, se presentan los resultados de estos dos estudios.

[6] Un análisis menos detallado se realizó con las 54 tareas del banco de tareas creado para la selección de las 11 tareas de la versión piloto.

### *3.2. Dos estudios paralelos: "pilotaje" y triangulación de expertos*

La prueba piloto se aplicó a una muestra de 53 estudiantes de los últimos cursos (sexto y octavo semestre) de la Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas que se imparte en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán (UADY) en México. Dicha licenciatura tiene una duración de cuatro años (8 semestres). Los egresados de dicha licenciatura, según el plan de estudios, están preparados para dar clases de bachillerato y universidad. Los 53 estudiantes a los que se les aplicó el cuestionario piloto, habían cursado cálculo diferencial en el primer semestre de la licenciatura y, a lo largo de ella, tomaron otros cursos relacionados con el análisis matemático (cálculo integral, cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, etc.). También habían cursado materias relacionadas con las matemáticas y su didáctica.

La prueba piloto se aplicó a dos grupos de estudiantes para profesores de bachillerato: 31 estudiantes del octavo semestre (último semestre de la licenciatura, Grupo 1) y 22 estudiantes del sexto semestre (Grupo 2). De acuerdo a las puntuaciones que establecimos para el grado de corrección de las tareas (2-correcta, 1-parcialmente correcta, y 0-incorrecta), un estudiante podría obtener una puntuación máxima de 28 puntos. Para nuestro estudio consideramos la muestra de 53 estudiantes como única ya que, como se muestra en la Tabla 1, no se encontraron diferencias significativas entre las puntuaciones obtenidas por ambos grupos. Para ello, utilizamos el paquete estadístico *Statgraphics centurion* para realizar un comparación entre dos muestras independientes.

**Tabla 1 –** Resumen estadístico para la puntuación total por grupos.

| | **Grupo 1** | **Grupo 2** |
|---|---|---|
| Recuento | 31 | 22 |
| **Promedio** | **13,16** | **12,64** |
| Desviación Estándar | 5,54 | 4,79 |
| Coeficiente de Variación | 42,08% | 37,96% |
| Mínimo | 0,0 | 2,0 |
| Máximo | 23,0 | 20,0 |
| Rango | 23,0 | 18,0 |
| Sesgo Estandarizado | -1,16 | -0,25 |
| Curtosis Estandarizada | -0,18 | -0,35 |

La Tabla 1 contiene el resumen estadístico para las dos muestras de datos. De particular interés son el *sesgo estandarizado* y la *curtosis estandarizada* que pueden usarse para comparar si las muestras provienen de distribuciones normales. Valores de estos estadísticos fuera del rango de -2 a +2 indican desviaciones significativas de la normalidad, lo que tendería a invalidar las pruebas que comparan las desviaciones estándar. En este caso, tanto los valores del sesgo estandarizado como los de la curtosis estandarizada (para ambos grupos), se encuentran dentro del rango esperado, por lo que no existen diferencias significativas entre los grupos 1 y 2. Esto se comprobó también, mediante una prueba-*t* para comparar medias que nos arrojó que no hay diferencia significativa entre las medias de las dos muestras de datos, con un nivel de confianza del 95,0%.

La Tabla 2 muestra las frecuencias de las puntuaciones obtenidas por los 53 futuros profesores dividiendo el rango de puntuación total (28 puntos) en intervalos del mismo ancho, y contando el número de datos en cada intervalo. Las frecuencias muestran el número de datos en cada intervalo, mientras que las frecuencias relativas muestran las proporciones en cada intervalo. Es posible apreciar en la Tabla 2 que 28 de los estudiantes (52,8%, clases 4, 5, 6 y 7) obtuvieron una puntuación superior a los 12 puntos de los 28 puntos posibles. De estos 28 estudiantes, 13 (24,5%) tuvieron puntuaciones dentro de la clase 4 que contiene a la puntuación media, 14 (26,4%) obtuvieron una puntuación entre 16 y 20 puntos (clase 5) y solamente uno (1,9%) obtuvo una puntuación entre 20 y 24 puntos (clase 6). Lo anterior evidencia que más de 50% de los estudiantes presentaron dificultades para resolver las tareas del cuestionario.

**Tabla 2 –** Frecuencias para la puntuación total

| *Clase* | *Límite Inferior* | *Límite Superior* | *Punto Medio* | *Frecuencia* | *Frecuencia Relativa* | *Frecuencia Acumulada* | *Frecuencia Rel. Acum.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | menor o igual | 0,0 | | 1 | 0,0189 | 1 | 0,0189 |
| 1 | 0,0 | 4,0 | 2,0 | 2 | 0,0377 | 3 | 0,0566 |
| 2 | 4,0 | 8,0 | 6,0 | 6 | 0,1132 | 9 | 0,1698 |
| 3 | 8,0 | 12,0 | 10,0 | 16 | 0,3019 | 25 | 0,4717 |
| 4 | 12,0 | 16,0 | 14,0 | 13 | 0,2453 | 38 | 0,7170 |
| 5 | 16,0 | 20,0 | 18,0 | 14 | 0,2642 | 52 | 0,9811 |
| 6 | 20,0 | 24,0 | 22,0 | 1 | 0,0189 | 53 | 1,0000 |
| 7 | 24,0 | 28,0 | 26,0 | 0 | 0,0000 | 53 | 1,0000 |
| | mayor de | 28,0 | | 0 | 0,0000 | 53 | 1,0000 |
| **Media = 12,9434 Desviación Estándar = 5,20139** | | | | | | | |

En general, el cuestionario *FE-CDM-Derivada* aplicado a futuros profesores de bachillerato, tuvo una dificultad media tal y como se ilustra en la Tabla 3. Los ítems[7]

[7] Para efectos de este trabajo, los ítems refieren a los incisos que contiene cada tarea. Por ejemplo, la tarea 6 contiene dos ítems a) y b).

del cuestionario que les resultaron más difíciles de resolver fueron el 2-d y la tarea 7. La tarea uno y los ítems 2-a, 3-a y 4-a, fueron los que tuvieron más respuestas correctas.

**Tabla 3 –** Índice de dificultad de los ítems del cuestionario CDM-Derivada

| | **Ítem** | **Índice de dificultad** | **%** |
|---|---|---|---|
| 1 | I-1 | 0,8679 | 86,79 |
| 2 | I-2a | 0,7547 | 75,47 |
| 3 | I-2b | 0,6038 | 60,38 |
| 4 | I-2c | 0,6415 | 64,15 |
| 5 | I-2d | 0,1321 | 13,21 |
| 6 | I-3a | 0,8491 | 84,91 |
| 7 | I-3b | 0,5660 | 56,60 |
| 8 | I-4a | 0,7547 | 75,47 |
| 9 | I-4b | 0,5849 | 58,49 |
| 10 | I-5 | 0,5283 | 52,83 |
| 11 | I-6a | 0,5660 | 56,60 |
| 12 | I-6b | 0,4528 | 45,28 |
| 13 | I-7 | 0,4528 | 45,28 |
| 14 | I-8 | 0,1132 | 11,32 |
| Media: 0,56 | | | |

Un aspecto que es importante destacar es que para las tareas 9, 10 y 11, de la primera versión del cuestionario, no se obtuvieron respuestas por parte de los estudiantes. Los resultados de las Tablas 1, 2 y 3, se presentan sin contemplar dichas tareas. Más adelante se verá cómo con los resultados del estudio mediante expertos, se confirma la intención inicial de los autores de suprimir estas tareas.

Con la finalidad de afianzar la fiabilidad y la validez del *Cuestionario FE-CDM-Derivada*, realizamos un estudio en el cual se sometió a revisión mediante el *juicio de expertos* la versión piloto previamente elaborada. Este estudio se llevó a cabo, concretamente, para indagar el grado de relevancia con el que los ítems evalúan cada uno de los siguientes aspectos: distintos significados del objeto derivada, las representaciones activadas tanto en los enunciados como en las posibles soluciones y el tipo de conocimiento didáctico-matemático en lo referente a la faceta epistémica. Así mismo, se estudió la ausencia de algún contenido relevante, y la redacción y comprensión de los enunciados, lo que contribuyó a la mejora de las características y a la adecuación del nivel de dificultad de nuestro instrumento.

Para el estudio se contactó a doce expertos en el área de didáctica del cálculo y se les envío, vía correo electrónico, una encuesta en la cual podían plasmar su juicio sobre el cuestionario. Para facilitar la labor de los expertos, en la contestación de la encuesta, también se les hizo llegar a manera de anexo el *Cuestionario FE-CDM-Derivada* con soluciones esperadas (soluciones plausibles). De los doce expertos a los que les enviamos la encuesta, ocho la respondieron e hicieron llegar sugerencias y observaciones adicionales tanto del cuestionario como de las respuestas esperadas. Los 8 expertos que respondieron a la encuesta se encontraban adscritos a las siguientes universidades o centros de investigación: uno de la Universidad de Sonora, México (experto E1); dos del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Cinvestav, México (expertos E2 y E3); dos de la Universidad de Jaén, España (expertos E4 y E5); uno de la Universidad de Sevilla, España (experto E6); uno de la Universitat de Barcelona, España (experto E7); y uno de la Universitat Autònoma de Barcelona, España (experto E8).

En general, la valoración que recibió el *Cuestionario FE-CDM-Derivada* por parte de los expertos fue positiva, pues se obtuvieron para las 8 tareas puntuaciones de 4 o 5 (dentro de una escala de 0 a 5) respecto al grado de relevancia con la que las tareas evalúan los criterios mencionados en el apartado anterior. Tres de los investigadores lo señalan de la siguiente manera:

> *"Creo que es un cuestionario muy completo. Habrá que tener en cuenta que no sólo se miden los conocimientos sino la forma en que se han adquirido. Me refiero a un aprendizaje muy mecánico o rutinario o un aprendizaje significativo donde la derivada en un punto tiene varias representaciones"* (experto E7).
>
> *"…me gustaría resaltar que las tareas que se proponen son ricas y variadas y sí permiten medir el conocimiento didáctico-matemático de la derivada de futuros profesores de bachillerato. Igualmente, me gustaría resaltar la importancia de los criterios definidos para la selección de las tareas: distintos significados del objeto derivada; el uso de diferentes representaciones activadas en el enunciado y la solución de cada uno de los ítems y las tres componentes del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores (común del contenido, conocimiento especializado y ampliado)"* (experto E8).
>
> *"Considero que las tareas incluidas hacen un buen recorrido por los distintos significados de la derivada y considerando las distintas representaciones. Además, son simples, en tanto que no requieren cálculos pesados lo que enturbiaría el contenido que se pretende investigar"* (experto E4).

A partir de los resultados obtenidos de la aplicación piloto del cuestionario, y de los comentarios que realizaron los expertos respecto de las tareas 9, 10 y 11, se tomó la decisión de suprimirlas del cuestionario original (Figuras 2, 3 y 4), ya que éstas no fueron respondidas por ninguno de los profesores en formación inicial a los que se le aplicó la prueba piloto. Podríamos inferir hipótesis para tratar de responder a este suceso, por ejemplo la falta de tiempo, la complejidad de las tareas y de los ítems que las componen (aspecto señalado por los expertos 2 y 6), o la falta de conocimiento especializado y, en particular, avanzado que faculta a los profesores resolver tareas con esas características. Sin embargo, debido a la falta de datos, no es posible responder o confirmar alguna de nuestras hipótesis. Debido a que las tres tareas evaluaban aspectos del conocimiento especializado y avanzado con mayor nivel de dificultad, y dado que estos tipos de conocimiento se evalúan en las otras tareas, decidimos suprimirlas tanto de la versión piloto como de la versión definitiva.

**Figura 2 –** Tarea 9 suprimida de la versión piloto del Cuestionario

9. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - 3h)}{3h} = f'(x_0)$$

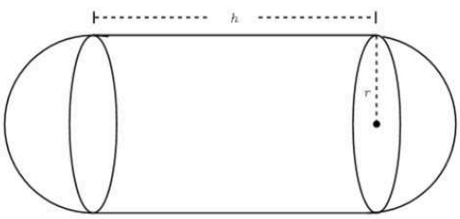
a) Justifica gráficamente la proposición anterior.
b) Prueba la proposición mediante el uso de la definición de derivada.

**Figura 3 –** Tarea 10 suprimida de la versión piloto del Cuestionario

10. Haciendo uso de la definición de derivada, demuestra que:
a) Si $g(x) = f(x + c)$ entonces $g'(x) = f'(x + c)$
b) Si $h(x) = f(x) + c$ entonces $h'(x) = f'(x)$
c) Interpreta ambas afirmaciones gráficamente.

**Figura 4 –** Tarea 11 suprimida de la versión piloto del Cuestionario

11. Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos para almacenar gas propano. El costo por metro cuadrado de los extremos semiesféricos es el doble que el de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de $10\pi$ m$^3$? Recuerda que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y su área es $4\pi r^2$.



Así mismo se proporcionaron diversas observaciones para cada una de las tareas que componen el cuestionario. Entre las que podemos destacar, por su especial relevancia en la inclusión de las tareas que conformaron la versión definitiva del cuestionario, se encuentran las siguientes:

> *“Puede haber alumnos que vengan de temas de economía y empresa y ahí la derivada está asociada a conceptos como el de marginalidad donde la derivada aparece como la función de utilidad marginal... Falta alguna cuestión que relacione la derivada con la economía, ya que si no el cuestionario está muy volcado a una única aplicación de otras ciencias (la Física)”* (E5).

> *“…es que es necesario incluir actividades que se relacionan con la modelación. Entre ellas están los problemas de optimización y los de razón instantánea de cambio. Asimismo me parece que debería incluirse algún problema en el que las expresiones verbales jueguen un papel más importante. Por ejemplo algún enunciado que diga cosas como el siguiente: “La energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad y se ha encontrado experimentalmente que la constante de proporcionalidad es un medio de su masa. ¿Cuál es la rapidez de cambio de la energía cinética con respecto a la velocidad cuando v = 2 m/seg?”* (E1).

Las observaciones anteriores de los expertos E5 y E1, respectivamente, nos dieron pautas para incluir las tareas que se presentan en la Figura 5. El análisis epistémico las tareas que componen la versión final del cuestionario, se presenta en la sección 4.

**Figura 5 –** Tareas incluidas en la versión final del *Cuestionario FE-CDM-Derivada*

9. En una empresa el coste total de producir $q$ unidades viene dado por la función $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 12q^2 + 150q + 2304$.
   a) Halla las funciones que determinan el coste total medio y el coste marginal.
   b) Determina el coste marginal y el coste total medio cuando la producción es de 3 y de 6 unidades.

10. La energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad y se ha encontrado experimentalmente que la constante de proporcionalidad es un medio de su masa. ¿Cuál es la rapidez de cambio de la energía cinética con respecto a la velocidad cuando $v = 0\ {}^{mts}/_{seg}$? Justifica tu respuesta.

11. ¿Es posible encontrar dos números cuya suma sea 120 y el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo? Si es así, ¿cuáles serían dichos números? Explica tu razonamiento.

Uno de los expertos, E8, propone incluir 5 tareas para profundizar más en la variedad de representaciones. No obstante, estamos de acuerdo con el experto E7 cuando señala:

> *“Más que añadir otras tareas me parece que sería conveniente completar con entrevistas que permitieran profundizar en las respuestas. Tareas, claro que se*

> *pueden añadir, pero no es realista proponer un cuestionario demasiado largo".*

Otras observaciones fueron realizadas por cada uno de los expertos, que participaron en la evaluación de nuestro instrumento, de manera general. Estas referían a aspectos de redacción de algunas de las tareas. Dichas sugerencia las hemos considerado para la versión final de nuestro instrumento.

## 4. Análisis epistémico de las tareas del cuestionario

A continuación presentamos, para cada una de las tareas incluidas en la "versión final" del instrumento *FE-CDM-Derivada*, el análisis detallado del contenido que evalúan. Para realizar dicho análisis presentamos para cada tarea, primeramente, una descripción "general" de los aspectos que evalúan, atendiendo a los tres criterios mencionados en la fase 4 del apartado 3.1. Luego presentamos de manera detallada el análisis del contenido evaluado aplicando las herramientas teóricas que proporciona el Enfoque Ontosemiótico; concretamente, los objetos matemáticos primarios, sus significados y los procesos involucrados en las prácticas matemáticas realizadas respecto de las tareas sobre derivadas. Para la realización del análisis del contenido proponemos algunas soluciones plausibles de cada una de las tareas[8].

### *4.1. Tarea Uno: Significados de la derivada*

La tarea 1 (Figura 6), es una pregunta clásica que se ha realizado en diversas investigaciones (Badillo, 2003; Hähkiöniemi, 2006; Habre y Abboud, 2006; Bingolbali y Monaghan, 2008, Badillo, Azcárate y Font, 2011), para explorar los significados que conocen los estudiantes sobre la derivada. Al tratarse de una pregunta de carácter "global", se espera que los futuros profesores proporcionen "listados" de los posibles significados de la derivada. Por tal motivo, esta primera tarea del cuestionario explora el conocimiento común, de los futuros profesores, relacionado con los significados de la derivada.

[8] Por motivos de espacio no hemos incluido las soluciones plausibles encontradas para cada tarea. Éstas se pueden leer en la Tesis Doctoral de Pino-Fan (2013). No obstante, para los análisis epistémicos que aquí se presentan, si se han considerado todas las posibles soluciones encontradas a propósito de una tarea.

**Figura 6 –** Tarea 1 del Cuestionario *FE-CDM-Derivada*

| |
|---|
| Tarea 1<br>¿Qué significados tiene para ti la derivada? |

*Solución plausible de la tarea uno*

Una posible solución a la tarea, o solución esperada, es la siguiente:

- La derivada de una función o función derivada tiene diversos significados entre los cuales podemos destacar:
  - ✓ Pendiente de la recta tangente a una función determinada.
  - ✓ La variación instantánea de una magnitud escalar respecto de otra (por ejemplo, la variación instantánea de la distancia respecto al tiempo da como resultado la velocidad).
  - ✓ El límite del cociente de incrementos.

*Contenido ontosemiótico: análisis epistémico*

Debido a la “generalidad” de la tarea (tanto la cuestión como el tipo de solución esperada), no realizamos para ésta el desglose operativo de las configuraciones de objetos y procesos del análisis epistémico. Basta con señalar que tanto los elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones y argumentos subyacentes a las posibles soluciones de la tarea son de carácter “verbal”, descripciones verbales en las que el profesor en formación inicial no requiere hacer conexiones entre los distintos significados de la derivada, bastándole con “recordar” los usos y significado que ha dado a dicho objeto a lo largo de su formación matemática y didáctica para proporcionar su respuesta.

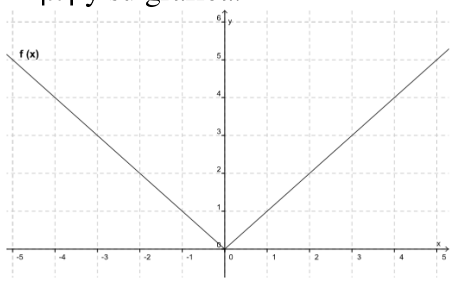
### *4.2. Tarea Dos: Análisis de la derivada de la función valor absoluto*

La tarea 2 (Figura 7), que ha sido objeto de diversas investigaciones (Tsamir, Rasslan, y Dreyfus, 2006; Santi, 2011), indaga sobre los tres tipos de conocimiento que componen la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada: 1) conocimiento común (ítem a), en tanto que el futuro profesor debe solamente resolver el ítem sin necesidad de utilizar diversas representaciones o argumentaciones; 2) conocimiento especializado del contenido, en dos niveles, por un lado los ítems b) y c) demandan al profesor, además de resolver los ítems, el uso de conocimientos que le permita utilizar diversidad de representaciones (gráficas, simbólicas y verbales) y argumentaciones válidas que justifiquen sus procedimientos, y por otro, el ítem e) exige al futuro profesor la identificación de conocimientos (configuraciones de objetos y sus significados) involucrados en la resolución de la tarea; y 3) conocimiento ampliado (ítem d), puesto que exige a los estudiantes para profesores generalizar la tarea inicial sobre la derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$, a partir de justificaciones válidas para la proposición "la gráfica de una función derivable no puede tener picos" mediante la definición de la derivada como tasa instantánea de variación (límite del cociente de incrementos). Las acepciones de la derivada como pendiente de la recta tangente y tasa instantánea de variación, están asociadas a esta tarea.

**Figura 7 –** Tarea 2 del Cuestionario *FE-CDM-Derivada*

Tarea 2

Examina la función $f(x) = |x|$ y su gráfica.




a) ¿Para qué valores de $x$ es derivable $f(x)$?
b) Si es posible, calcula $f'(2)$ y dibuja una representación gráfica de tu solución. Si no es posible, explica por qué.
c) Si es posible, calcula $f'(0)$ y dibuja una representación gráfica de tu solución. Si no es posible, explica por qué.
d) Con base en la definición de derivada, justifica por qué la gráfica de una función derivable no puede tener "picos" (esquinas, ángulos).
e) ¿Qué conocimientos se ponen en juego al resolver los apartados a), b), c) y d) de esta tarea?

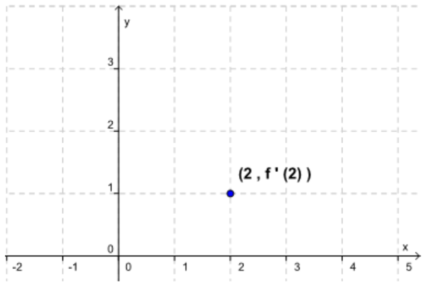
*Soluciones plausibles de los apartados de la tarea dos*

A continuación presentamos, para cada uno de los apartados de la tarea dos, una posible solución.

a) Para todos los números reales excepto para $x = 0$ dado que en este valor la gráfica de la función tiene forma de pico.
b) Teniendo en cuenta que (1) la derivada en un punto se puede definir como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, (2) que en $x = 2$ la recta tangente a la gráfica de la función es la diagonal del primer cuadrante, (3) que la pendiente es el cociente entre la variación vertical y la horizontal, se

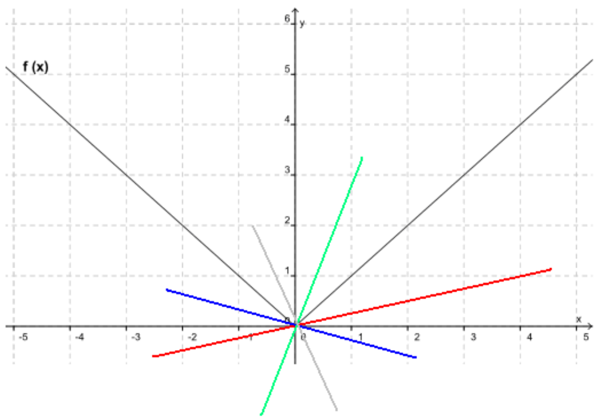
divide la variación vertical entre dos puntos de esta diagonal entre la variación horizontal y se obtiene $f'(2) = 1$.

**Figura 8 –** Representación cartesiana de $f'(2) = 1$




c) Por el punto $x = 0$ no se puede trazar la tangente. Considerando que, en el contexto de la geometría sintética, una tangente a una curva es una recta que tiene un sólo punto de contacto con ella, se pueden trazar infinitas tangentes a la función. Si interpretamos la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva, puesto que no existe una única tangente, debemos concluir que no existe derivada en $x = 0$.

**Figura 9 –** Solución "empírica" del apartado c) de la tarea dos




d) Consideremos la definición de la derivada: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Para que el límite anterior exista, los límites laterales $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, deben de existir y coincidir. Ahora bien, un pico representa un "salto brusco" en la pendiente de la recta tangente. Dicha pendiente se aproxima con el cociente $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para valores de $h$ muy pequeños. Si el límite bilateral que define a $f'(x)$ existe, significa que el "salto" es inexistente. Dicho de otro modo, para que $f'(x)$ exista, la función $f(x)$ no puede tener "picos".

e) En la solución de la tarea dos, se pueden identificar el uso de los siguientes conocimientos:
   - ✓ Funciones y sus propiedades.
   - ✓ Continuidad de funciones.
   - ✓ Derivada en un punto.
   - ✓ Función derivada (como pendiente de la recta tangente y como límite del cociente de incrementos).
   - ✓ Derivabilidad de funciones.
   - ✓ Relación entre continuidad y derivabilidad.
   - ✓ Uso de diversas representaciones tanto para la función como para la función derivada.
   - ✓ Derivadas laterales.
   - ✓ Procedimientos y argumentos "intuitivos" y formales para la solución de cada uno de los apartados de la tarea.

*Contenido ontosemiótico: análisis epistémico*

Presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) y sus significados inmersos tanto en el planteamiento (previos) como en la solución de la tarea (emergentes). Cabe señalar que para la realización de este análisis se consideraron todas las posibles soluciones, de los apartados de esta tarea (Pino-Fan, 2013).

− *Proceso de Representación* ↔ *Significación* −

Se identifican, mediante un proceso de descomposición del texto en unidades, diversos elementos lingüísticos y conceptos, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en la solución esperada de la tarea dos. A continuación se detallan los elementos lingüísticos y conceptos identificados, así como sus significados según su contexto de uso.

*Elementos lingüísticos*

Entre los elementos lingüísticos previos que identificamos se encuentran:

- La expresión $f(x) = |x|$, la cual refiere a la representación algebraica de la función "valor absoluto de x".
- La representación gráfica (Figura 7) de la función "valor absoluto de x". Ilustra de manera gráfica el punto para el cual la derivada no está definida.

- La expresión, "Examina la función…y su gráfica". Sentencia que tiene por objetivo pedir que se estudie de manera detallada la función "valor absoluto de *x*" y se considere sus propiedades (continuidad, derivabilidad, etc.).
- La expresión, "Para qué valores de $x$ es derivable $f(x)$" (apartado a). Sentencia que solicita se proporcione el domino de la función derivada de la función "valor absoluto de *x*".
- La expresión $f'(2)$. Representación simbólica de la imagen o valor de la función derivada en el punto $x = 2$.
- La expresión, "Si es posible, calcula $f'(2)$ y dibuja una representación gráfica de tu solución" (apartado b). Sentencia que solicita un procedimiento de cálculo de la derivada de la función en $x = 2$, y la representación cartesiana del punto $(2, f'(2))$.
- La expresión $f'(0)$. Representación simbólica de la imagen o valor de la función derivada en el punto $x = 0$.
- La expresión, "Si es posible, calcula $f'(0)$… si no es posible, explica por qué" (apartado c). Sentencia que solicita un procedimiento de cálculo de la derivada de la función en $x = 0$, así como la argumentación de que $f'(0)$ no existe.

Entre los elementos lingüísticos emergentes podemos destacar:

- Expresiones tales como "$\mathbb{R} - \{0\}$", "$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$", etc. Representaciones simbólicas o notacionales que refieren al dominio de la función derivada: "todos los reales excepto para $x = 0$".
- La expresión $f'(2) = 1$. Representación simbólica o notacional que hace referencia a la proposición: La imagen de la función derivada en el punto $x = 2$ es uno (solución del apartado b).
- La gráfica cartesiana del punto $(2, f'(2))$ (Figura 8), que refiere a la imagen o valor de la función derivada en el punto $x = 2$.
- La representación gráfica de la derivada de la función "valor absoluto de *x*". Ilustra de manera gráfica que la función derivada en $x = 0$ no está definida.

*Conceptos*

Entre los conceptos previos requeridos para la solución de la tarea se encuentran:

- Valor absoluto. El valor absoluto de un número real es el valor numérico de dicho número sin tener en cuenta el signo. Formalmente se define como $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$ donde $x \in \mathbb{R}$.
- Función valor absoluto. Definida por el criterio o regla de correspondencia $f(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$ donde $x \in \mathbb{R}$.
- Dominio (variable independiente). Valores de *x* para los cuales la función $f(x) = |x|$ y su correspondiente $f'(x)$ están definidas.

- Imagen (variable dependiente). Valor $y \in \mathbb{R}$ que se le asigna a cada una de las $x \in \mathbb{R}$ del dominio de la función por medio de una regla de correspondencia. En el caso de $f(x)$ la regla de correspondencia es $|x|$.
- Función derivada. Definida formalmente como $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- Derivada en un punto. Derivada en $x = 2$ y $x = 0$, entendida como un límite y como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto.
- Continuidad. Una función $f$ es continua en $c$ sí y sólo sí se cumplen las 3 condiciones siguientes: i) $f(c)$ está definida, ii) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe, y iii) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Como conceptos emergentes podemos destacar:

- Función derivada de la función valor absoluto. Función definida por la regla de correspondencia $f'(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$
- Límite funcional. Valor $L$ al que se aproxima $f(x)$ conforme $x$ se aproxima a un cierto valor $a \in \mathbb{R}$.
- Derivadas laterales. Es el límite del cociente de incrementos cuando $h$ se aproxima a cero con valores negativos (derivada lateral por la izquierda) o con valores positivos (derivada lateral por la derecha.

*– Proceso de Composición –*

A partir de los elementos lingüísticos representacionales y los conceptos/definiciones identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones/propiedades, procedimientos y argumentos. A continuación se detallan, respectivamente, las propiedades, procedimientos y argumentos, identificados en las soluciones plausibles de la tarea.

*Proposiciones (PP)*

Las proposiciones previas que identificamos fueron las siguientes:

- PP1: Intuitivamente una función es continua en un valor $c$ si para valores del dominio muy cercanos a $c$ la función "sufre pequeñas variaciones". Se usa para reconocer que la función valor absoluto es continua, teniendo en cuenta su gráfica.
- PP2: La función es derivable en un punto del dominio $x_0$ si las derivadas laterales existen y son iguales. Esta proposición es usada para reconocer la derivabilidad o no derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$ y $x = 2$.

- PP3: Una función derivable es continua pero una función continua no es necesariamente derivable. Proposición utilizada para reconocer la no derivabilidad de la función valor absoluto en $x = 0$.

Las proposiciones emergentes son:

- PP4: $f'(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$. Su correcta interpretación remitiría a la solución de los apartados a), b) y c) de la tarea.
- PP5: $f'(2) = 1$. Solución del apartado b) de la tarea.
- PP6: $f'(0)$ no existe. Solución del apartado c) de la tarea.

*Procedimientos (P)*

Como procedimientos, podemos señalar los siguientes:

- P1: Procedimientos empíricos para la determinación de cada uno de los apartados de la tarea, por ejemplo, el trazado de varias rectas tangentes a la función en el punto $x = 0$ (Figura 9). Ayudan a resolver el problema de manera empírica a partir de la representación gráfica de la función “valor absoluto”.
- P2: Cálculo de la derivada en un punto mediante su definición formal por límites. Procedimiento formal que se justifica mediante el uso de la definición formal de la derivada y la definición de la función valor absoluto. Procedimiento con el que se da solución al apartado b) de la tarea.
- P3: Procedimientos que involucran, fundamentalmente, la proposición PP2. Comprobación formal de la existencia de la derivada en un punto mediante el cálculo de los límites laterales que definen las derivadas laterales. Con este procedimiento se da solución al apartado c) de la tarea.

*Argumentos (A)*

- A1: “La derivada en el intervalo $(-\infty, 0)$ es -1 ya que es la pendiente de la recta $y = -x$”.
- A2: “La derivada en el intervalo $(0, \infty)$ es 1 ya que es la pendiente de la recta $y = x$”.
- A3: “La derivada en el punto $x = 0$ no está definida ya que la gráfica presenta un pico”.
- A4: “La función no es derivable en $x = 0$ ya que en dicho punto podemos trazar infinitas rectas tangentes a la función….”.
- A5: Argumento formal, usando la definición formal de la derivada como el límite de cociente de incrementos, para calcular la derivada en el punto $x = 2$ que es la solución al apartado b).
- A6: “Dado que las derivadas laterales son diferentes, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$”. Argumento formal mediante el cálculo de los límites laterales que definen las derivadas laterales. Solución del apartado c) de la tarea.

Los argumentos A1, A2, A3 y A4, refieren a justificaciones *gráficas-verbales* (visuales) a partir de la representación gráfica de la función "valor absoluto" y entendiendo la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto determinado.

### *4.3. Tarea Tres: Cálculo de la función primitiva*

La tarea 3 (Figura 10), tomada de Delos Santos (2006), explora el conocimiento ampliado de los futuros profesores, ya que requiere, para su resolución, el uso de objetos matemáticos más avanzados en el currículo de matemáticas del nivel bachillerato, tal como la integral de una función o el teorema fundamental del cálculo. Las representaciones que el estudiante debe manejar para la resolución de la tarea son la simbólica, gráfica y tabular. El conocimiento ampliado evaluado en esta tarea está asociado al significado de la derivada como pendiente de la recta tangente.

**Figura 10 –** Tarea 3 del *Cuestionario FE-CDM-Derivada*

Tarea 3

Para una función dada $y = f(x)$, se cumplen los valores de la siguiente tabla:

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1.0 | 2 |
| 1.5 | 3 |
| 2.0 | 4 |
| 2.5 | 5 |

a) Encuentra una expresión para $f(x)$
b) ¿Puedes encontrar una segunda expresión, distinta a la anterior, para $f(x)$? ¿Cuál sería? Justifica la respuesta.

*Soluciones plausibles de los apartados de la tarea tres*

A continuación presentamos, para cada uno de los apartados de la tarea tres, una posible solución esperada.

a) Basándonos en los datos de la tabla, es posible encontrar un patrón de la siguiente forma:

| $x$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| 0 | 2 (0) = 0 |
| 1.0 | 2 (1) = 2 |
| 1.5 | 2 (1.5) = 3 |
| 2.0 | 2 (2) = 4 |
| 2.5 | 2 (2.5) = 5 |
| : | : |
| $x$ | $2(x) = 2x$ |

Por tanto, dado que $f'(x) = 2x$ y sabiendo que para una función $f(x) = x^n$ la derivada está dada por $f'(x) = nx^{n-1}$, entonces una expresión para $f(x)$ sería $f(x) = x^2$.

b) Sí podemos encontrar otra expresión para $f(x)$, distinta a $f(x) = x^2$. Si $f'(x) = 2x$, entonces $f(x) = \int 2x\, dx = x^2 + C$. De esta forma, $f(x)$ puede ser cualquier función de la familia de funciones $f(x) = x^2 + C$, donde $C \in \mathbb{R}$.

*Contenido ontosemiótico: análisis epistémico*

A continuación presentamos el análisis epistémico mediante la descripción de los procesos, los objetos matemáticos primarios y sus significados, inmersos tanto en el planteamiento (previos) como en la solución de la tarea (emergentes).

*– Proceso de Representación ↔ Significación –*

Como parte de esta dualidad entre representación y significación hemos identificado diversos elementos lingüísticos y conceptos/definiciones, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en la solución esperadas de la tarea tres.

*Elementos lingüísticos*

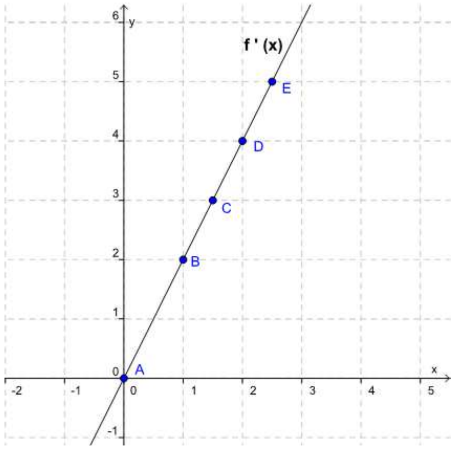
Entre los elementos lingüísticos previos que hemos identificado se encuentran:

- La expresión $y = f(x)$. Denota una función indeterminada, en este caso, una función que cumple ciertas condiciones reguladas con la tabla.
- La tabla de valores (Figura 10). Función derivada de una función desconocida de la cual se conocen cinco imágenes para los valores de la variable $x$ dados en la tabla. Proporciona parejas ordenadas del tipo $\left(x, f'(x)\right)$.
- La expresión, "encuentra una expresión para $f(x)$". Refiere a la existencia de un procedimiento para hallar una función cuya derivada tenga los valores de la tabla en los puntos dados.

Entre los elementos lingüísticos emergentes podemos destacar:

- La representación gráfica de los valores de la tabla (Figura 11), la cual representa la conversión de la tabla de valores dados de la función derivada, en su gráfica cartesiana correspondiente.

**Figura 11 –** Representación gráfica de los valores conocidos de la función derivada




- Las expresiones “$y = 2x$” o “$f'(x) = 2x$”. Ecuación de la recta que pasa por los 5 puntos alineados en el plano cartesiano y representación simbólica de la función derivada. Refieren a un procedimiento de interpolación lineal, basado en la visualización del gráfico cartesiano.
- La expresión, $f(x) = x^2$. Primitiva (antiderivada) de la función $y = 2x$.

*Conceptos*

Los conceptos previos, requeridos para la solución de la tarea, que identificamos son:

- Función de variable real desconocida. Función $f(x)$ que se determinará a partir de su función derivada definida parcialmente por cinco puntos.
- Pares ordenados. Originales e imágenes de la función derivada.
- Función derivada de una variable real. Definida parcialmente por cinco puntos cuyas coordenadas se expresan de manera tabular. Los cinco puntos dados se supone que evocan o representan a todo el grafo de la función derivada.

Los conceptos emergentes que identificamos fueron los siguientes:

- Recta. Contiene a los cinco puntos del gráfico cartesiano que representa a la derivada. Se supone una interpolación y extrapolación lineal.
- Pendiente. Variación que existe en el eje $y$ (ordenadas) con respecto al eje $x$ (abscisas) entre dos puntos cualesquiera de la recta que pasa por los 5 puntos de la tabla. Permite hallar la ecuación de dicha recta mediante la ecuación punto-pendiente ($y = 2x$).
- Integral/Primitiva o antiderivada de una función. Función cuya derivada es $f'(x) = 2x$.
- Familia de funciones. Funciones que se encuentran dentro del conjunto de funciones que cumplen con la forma $f(x) = x^2 + c$, donde $c \in \mathbb{R}$.

*– Proceso de Composición –*

A partir de los elementos lingüísticos y de los conceptos identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos.

<u>*Proposiciones (PP)*</u>

Las proposiciones previas que identificamos son:

- PP1: "$y - y_1 = m(x - x_1)$, particularizada en $y = 2x$". Ecuación punto-pendiente, la cual permite encontrar la representación algebraica de la función derivada.
- PP2: Reglas de derivación. Concretamente "la derivada de una función constante es igual a cero", la cual permite determinar que la función buscada es cualquiera de la familia $f(x) = x^2 + c$ donde $c \in \mathbb{R}$.

Así mismo, identificamos las siguientes proposiciones emergentes:

- PP3: La primitiva de $y = 2x$ es $y = x^2$ (Teorema fundamental del cálculo). Se usa para hallar la función requerida una vez hallada su derivada.
- PP4: La función derivada de todas las funciones del tipo $f(x) = x^2 + c$ donde $c \in \mathbb{R}$, es $f'(x) = 2x$. Solución del apartado b) de la tarea.

<u>*Procedimientos (P)*</u>

- P1: Interpolación lineal en el gráfico cartesiano de la función derivada dada para valores particulares. Esto se usa para hallar la expresión algebraica de la derivada.
- P2: Cálculo de la antiderivada de $y = 2x$. Esto se realiza o bien mediante las reglas de derivación (derivada de la función potencial) o bien mediante las reglas de integración. Este procedimiento origina la respuesta de ambos apartados de la tarea.
- P3: Ensayo y error, probando posibles reglas de correspondencia entre los valores de $x$ y los de $f'(x)$, a partir de los valores dados en la tabla. Este procedimiento es de carácter numérico-técnico. El único variante con respecto a P1, es la búsqueda de un patrón que permita establecer la regla de correspondencia que permite definir la función derivada.
- P4: Procedimientos "formales". Procedimientos de tipo gráfico-técnico o numérico-técnico, el cual varia con respecto a los procedimientos anteriores en que, una vez hallada la representación algebraica de la función derivada (ya sea de manera numérica o gráfica), se hace uso de contenidos más avanzados en el currículo de bachillerato tal como el concepto de integral y el teorema fundamental del cálculo en su forma intuitiva (PP3).

*Argumentos*

- A1: La expresión algebraica de la función derivada es $y = 2x$ porque visualmente se observa que los cinco puntos dados están alineados de manera rectilínea; se ve que pasa por el origen y su pendiente es 2. Este argumento establece la validez de la expresión de la función derivada de manera empírica, asumiendo que los cinco puntos dados representan al grafo $\left(x, f'(x)\right)$ de la función derivada.
- A2: La función buscada es $y = x^2$ porque la derivada de esta función es $y = 2x$. Establece la validez de la solución dada para la función $f(x)$ teniendo en cuenta la regla para derivar la función potencial.

### *4.4. Tarea Cuatro: Derivada de la función constante*

La tarea 4 (Figura 12), explorada en el trabajo de Viholainen (2008), indaga sobre el conocimiento especializado de los futuros profesores, en tanto que requiere para su resolución, del empleo de diversas representaciones (gráfica, descripción verbal, fórmula) y diversas justificaciones para la proposición "la derivada de una función constante siempre es igual a cero", en las que se pueden movilizar distintas interpretaciones de la derivada: pendiente de la recta tangente, razón instantánea de cambio y tasa instantánea de variación).

**Figura 12 –** Tarea 4 del *Cuestionario FE-CDM-Derivada*

Tarea 4

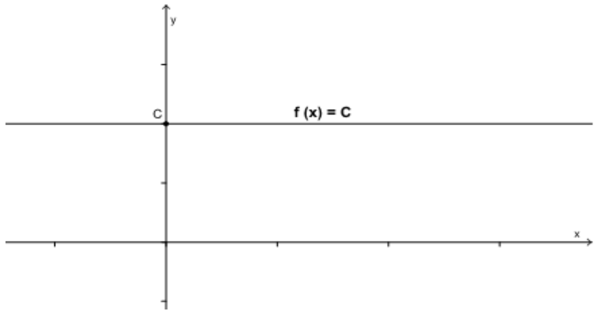
a) Explica, mediante el uso de representaciones gráficas, por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero.
b) Usando la definición formal de la derivada, prueba que la derivada de una función constante es cero.

*Soluciones plausibles de los apartados de la tarea cuatro*

Presentamos, para cada uno de los apartados de la tarea cuatro, una solución esperada.

a) Sin pérdida de generalidad, sea $f(x) = C$ con $C \in \mathbb{R}$, una función constante. La siguiente figura muestra su representación gráfica

**Figura 13 –** Representación gráfica de una función constante cualquiera




- ✓ La recta tangente es la que mejor se aproxima a la gráfica en un entorno del punto. En el caso de que la función tenga por gráfica una recta, la recta tangente coincide con la gráfica de la función. En ese caso la recta tangente en cualquier punto será $f(x) = C$ y dado que las funciones constantes siempre tienen como representación gráfica rectas horizontales (rectas paralelas al eje *x*), y ya que la pendiente de una recta se mide a partir de la inclinación que esta presenta con respecto al eje *x*, la pendiente de las rectas paralelas al eje *x* siempre son cero, por tanto $f'(x) = 0$.
- ✓ Si interpretamos la derivada como la razón de cambio de una variable *y* respecto de una variable *x*, y si la función que describe dicha razón de cambio es constante, entonces esto significa que conforme la variable *x* varía, la variable *y* no varía. Por tanto la razón de cambio de *y* con respecto a *x* siempre es cero.

b) Sea $f(x) = C$ donde $C \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

*Contenido ontosemiótico: análisis epistémico*

*− Proceso de Representación ↔ Significación −*

Como parte de este proceso, hemos identificado diversos elementos lingüísticos y conceptos, previos y emergentes, tanto en el planteamiento como en la solución esperada.

<u>*Elementos lingüísticos*</u>

Los elementos lingüísticos previos que identificamos son:

- La expresión, “Explica, mediante el uso de representaciones gráficas, por qué la derivada de una función constante siempre es igual a cero”.

Enuncia una propiedad de las derivadas de las funciones constantes y requiere elaborar una justificación gráfico-verbal de dicha propiedad.

- La expresión, "Usando la definición formal de la derivada, prueba que la derivada de una función constante es cero". Sentencia que pretende el uso de un procedimiento para demostrar de manera formal la propiedad enunciada.

Como elementos lingüísticos emergentes identificamos:

- La expresión, $f(x) = C$ con $C \in \mathbb{R}$. Refiere a una representación simbólica de una función constante arbitraria.
- La representación gráfica de la función constante arbitraria (Figura 13). La cual permite observar el comportamiento de la función derivada para su posterior descripción.
- Las descripciones verbales que dan solución al apartado a) de la tarea. Dichas descripciones refieren a argumentaciones verbales que justifican de forma gráfico-verbal la proposición "la derivada de una función constante siempre es igual a cero".
- La simbología utilizada en la solución del apartado b) de la tarea. Esta simbología responde a un procedimiento de demostración formal (usando la definición de derivada como límite) de que la derivada de una función constante es 0.

*Conceptos/Definiciones*

Para esta tarea, específicamente, encontramos solamente conceptos previos requeridos para su resolución, entre los cuales se encuentran:

- Función constante. Función que toma el mismo valor para cualquier valor de la variable independiente.
- Derivada en un punto. Entendida como la pendiente (0) de las rectas tangentes a la función constante, que para este caso particular son paralelas al eje de abscisas.
- Recta tangente. En un contexto analítico, la representación gráfica de la tangente a una recta en cualquiera de sus puntos, coincide con la gráfica de dicha recta. Para este caso particular, para cualquier valor de $x$ que tomemos, la gráfica de la recta tangente a la función constante dada, coincidirá con la gráfica de esta última función.
- Pendiente. Interpretada como la inclinación de la recta que representa gráficamente la función constante.
- Función derivada. Entendida como el límite del cociente de incrementos, como el conjunto de pendientes de las posibles rectas tangentes a la función constante, o como el conjunto de razones instantáneas de cambio.

– *Proceso de composición* –

A partir de los elementos lingüísticos y los conceptos identificados en el proceso anterior, se reconoce el uso de proposiciones, procedimientos y argumentos.

*Proposiciones (PP)*

Identificamos la siguiente proposición previa:

- PP1: "la derivada de una función constante siempre es igual a cero". Proposición que requiere de una explicación grafica-verbal [apartado a)] y una demostración formal mediante el uso de la derivada como el límite del cociente de incrementos [apartado b)].

Las proposiciones que emergen son:

- PP2: La recta tangente a una función lineal de una variable real en cualquiera de sus puntos, coincide con dicha función. Interpretando en un contexto de geometría analítica, la tangente a una recta es la "misma recta".
- PP3: Las rectas paralelas al eje x tienen pendiente cero. Si se interpreta la pendiente de una recta como la inclinación de la recta respecto a la horizontal.

*Procedimientos (P)*

Los procedimientos que emergen para la solución de la tarea son:

- P1: El trazado de la representación gráfica de la función constante (Figura 13) la cual se usa posteriormente para analizar el comportamiento de la derivada de dicha función.
- P2: Cálculo, visual, de la pendiente de rectas paralelas al eje de las abscisas. Este procedimiento se usa en el apartado a) de la tarea para calcular la pendiente de las posibles rectas tangentes en puntos cualesquiera de la función constante. Este procedimiento puede referir a una justificación que sería solución del apartado a).
- P3: Cálculo de la derivada de la función constante aplicando la definición como límite del cociente de incrementos. Este procedimiento se utiliza para demostrar formalmente la proposición PP1, lo que a su vez es solución del apartado b) de la tarea.

*Argumentos*

Los argumentos que emergen para dar solución a la tarea son los siguientes:

- A1: Si interpretamos la derivada como pendiente de la recta tangente, entonces $f'(x) = 0$, ya que las funciones constantes siempre tienen como representación gráfica rectas horizontales (rectas paralelas al eje $x$). Puesto que, la pendiente de una recta es la inclinación que esta presenta con respecto al eje $x$, la pendiente de las rectas paralelas al eje $x$ siempre es cero. Este argumento que da solución al apartado a) de la tarea, establece la validez de la proposición mediante argumentos intuitivos de tipo gráfico y mediante el uso de la derivada como pendiente de la recta tangente.
- A2: Si interpretamos la derivada como la razón de cambio de una variable $y$ respecto de una variable $x$, y si la función que me describe dicha razón de cambio es constante, entonces esto significa que conforme la variable $x$ varía, la variable $y$ no varía. Por tanto la razón de cambio de $y$ con respecto a $x$ siempre es cero. Establece la validez de la proposición deduciendo a partir de la definición de derivada como razón de cambio.

Debido a las limitaciones de espacio, en las tareas subsecuentes realizaremos una descripción menos profunda de los aspectos que evalúan. Nuestra intención con las cuatro tareas anteriores ha sido evidenciar el tipo de análisis pormenorizados que se pueden realizar como parte del estudio de los conocimientos que se espera que los futuros profesores manifiesten mediante la diversidad de objetos matemáticos, y sus significados, involucrados en las prácticas que se espera que realicen en cada una de las tareas.

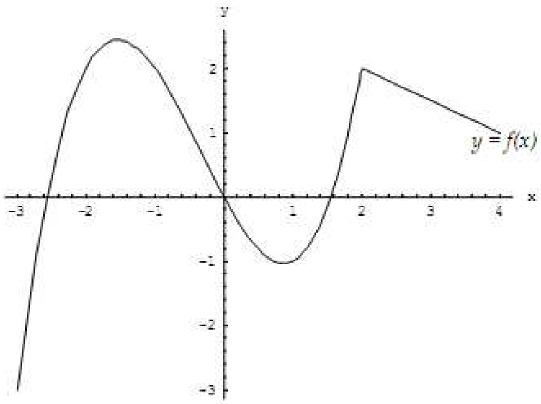
### *4.5. Tarea Cinco: Describiendo características globales de la derivada*

La tarea 5 (Figura 14), ha sido objeto de estudio en los trabajos de Hähkiöniemi (2004 y 2006). Esta tarea es de interés puesto que aporta información relevante sobre lo que se vincula a la derivada en un punto y a la función derivada en un intervalo, y la coordinación entre ambas informaciones. El profesor en formación inicial debe identificar, describir y justificar, a partir de la gráfica de una función, características importantes de la derivada de dicha función. Las representaciones que debe usar el profesor para la resolución de la tarea son, principalmente, gráficas y verbales, pero también debe hacer uso de representaciones simbólicas o notacionales (para denotar intervalos, por ejemplo). Por esta razón la tarea 5 explora el conocimiento del contenido especializado en su nivel de aplicación. La acepción de la derivada como pendiente de la recta tangente y su relación y aplicación al cálculo de valores máximos y mínimos, está relacionada con la resolución de esta tarea.

**Figura 14 –** Tarea 5 del *Cuestionario FE-CDM-Derivada*

Tarea 5

La figura muestra la gráfica de una función *f*. Escribe las observaciones que puedas hacer sobre la derivada de la función *f* en diferentes puntos de su dominio. Justifica tu respuesta.




Para realizar tu descripción puedes apoyarte de los siguientes aspectos, ¿Dónde es positiva la derivada? ¿Dónde es negativa la derivada? ¿Dónde es cero la derivada? ¿Está la derivada definida en todos los puntos del dominio de la función? ¿Dónde es constante la derivada? ¿Dónde alcanza la derivada su valor máximo y mínimo?

### *4.6. Tarea Seis: Cálculo de los ceros de la función derivada*

La tarea 6 (Figura 15) tomada de Delos Santos (2006), a simple vista, podría aparentar ser uno de los ejercicios que comúnmente se encuentran en los libros cálculo diferencial de nivel bachillerato, en los que basta aplicar algunos teoremas o proposiciones sobre derivadas para su resolución. Por esta razón, tanto el ítem a) como el b), de forma individual, evalúan aspectos del conocimiento común de los futuros profesores relacionados con la derivada en su acepción como pendiente de la recta tangente y razón instantánea de cambio. Sin embargo, el objetivo central de la tarea es explorar, globalmente, la actividad matemática desarrollada por los futuros profesores, y si en dicha actividad los futuros profesores logran hacer conexiones o asociaciones entre los distintos significados de la derivada. En este sentido, la tarea 6 evalúa aspectos del conocimiento del contenido especializado, en tanto que indaga acerca de la asociación que los futuros profesores establecen entre los distintos significados de un objeto matemático concreto: la derivada.

**Figura 15 –** Tarea 6 del *Cuestionario FE-CDM-Derivada*

Tarea 6

Dada la función $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$

a) Encuentra los puntos de la gráfica de la función para los que su tangente es horizontal.
b) ¿En qué puntos la razón instantánea de cambio de *y* con respecto a *x* es cero?

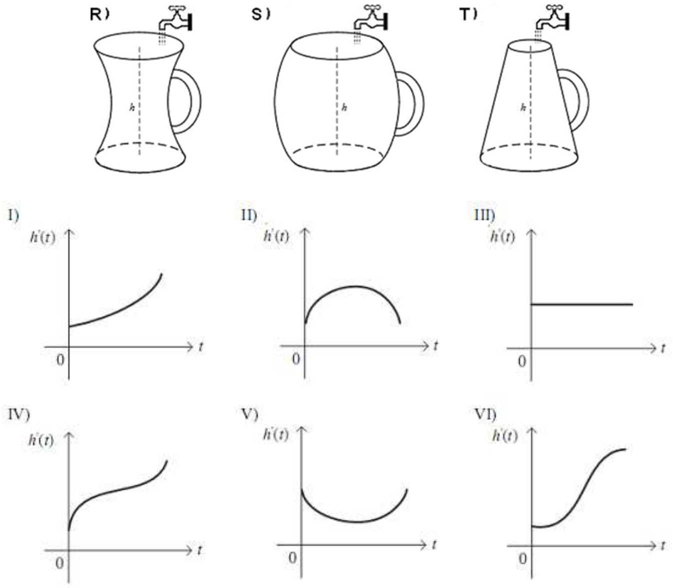
### *4.7. Tarea Siete: Tasas instantáneas de variación*

La tarea 7 (Figura 16) fue tomada, y modificada, del trabajo de Çetin (2009). Tanto el ítem a) como el b) generan información sobre el conocimiento especializado relacionado con el significado de la derivada como razón instantánea de cambio. Por un lado, el ítem a) requiere que el estudiante interprete los elementos lingüísticos verbales, gráficos (gráficas de las derivadas) e icónicos (imágenes de las tazas), para tratar de establecer una correspondencia inyectiva entre los elementos gráficos e icónicos. Además, los estudiantes deben encontrar procedimientos que les permitan establecer la correspondencia de cada elemento y dar justificaciones válidas de sus soluciones. En la búsqueda de tales procedimientos los estudiantes requerirán hacer uso de objetos matemáticos tales como la derivada como razón instantánea de llenado de un recipiente (velocidad instantánea de llenado), crecimiento y decrecimiento de funciones, teorema fundamental del cálculo (relación entre la derivada y su antiderivada), y además deberá de ser capaz de transitar entre las distintas representaciones y cambiar al lenguaje natural para expresar sus resultados. Por su parte el ítem b), requiere que los futuros profesores sean capaces de identificar los conocimientos (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que se ponen en juego al resolver la tarea; esto con miras a la gestión eficaz de los conocimientos de sus futuros alumnos. Así, la tarea 7 es evaluadora de dos niveles de conocimiento del contenido especializado. Un primer nivel en el que los futuros profesores deben hacer uso de diversas representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos para resolver la tarea. El segundo nivel se refiere a la competencia de los profesores en formación para identificar conocimientos puestos en juego en la resolución de una tarea sobre derivadas.

**Figura 16 –** Tarea 7 del *Cuestionario FE-CDM-Derivada*

Tarea 7

El flujo de llenado de las tazas R, S y T de la figura es constante. La altura del agua h dentro de las tazas es una función del tiempo. A continuación se dan las gráficas de seis funciones h'(t), tres de las cuales corresponden a las derivadas de las funciones del llenado de las tazas.




a) Relaciona cada una de las tazas con la gráfica de la derivada que le corresponde. Explica tu razonamiento para cada relación.
b) ¿Qué conocimientos se ponen en juego al resolver este problema?

### *4.8. Tarea Ocho: Velocidad instantánea*

La tarea 8 (Figura 17) tomada de Çetin (2009), proporciona información sobre el conocimiento ampliado de los profesores en formación inicial, ya que se trata de una aproximación a la derivada de una función (descrita por los valores de la tabla) en el punto $t=0.4$ a través de valores numéricos de dicha función. Además, la tarea 8 no es un problema escolar típico del nivel bachillerato, y requiere la comprensión del objeto derivada por parte de los futuros profesores, al menos en su acepción como razón instantánea de cambio, y concretamente, la derivada en un punto como velocidad instantánea. La solución de esta tarea se puede realizar mediante diferentes métodos, por ejemplo, la interpolación polinómica de Lagrange, lo cual sustenta la categorización de esta tarea como evaluadora del conocimiento ampliado.

**Figura 17 –** Tarea 8 del *Cuestionario FE-CDM-derivada*

Tarea 8

Una pelota se lanza al aire desde un puente de 11 metros de altura. $f(t)$ denota la distancia a la que se encuentra la pelota del suelo en un tiempo $t$. Algunos valores de $f(t)$ se recogen en la siguiente tabla:

| $t$ (sec.) | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(t)(m.)$ | 11 | 12.4 | 13.8 | 15.1 | 16.3 | 17.4 | 18.4 |

De acuerdo con la tabla, ¿cuál es la velocidad de la pelota cuando alcanza una altura en $t = 0.4$ segundos? Justifica la elección de tu respuesta.

a) 11.5 m/s b) 1.23 m/s c) 14.91 m/s d) 16.3 m/s e) Otro

### *4.9. Tarea 9: Derivada como coste marginal*

La Tarea 9 (Figura 18), fue incluida debido a la observación que, de alguna manera, realizaron tres de los expertos sobre la referencia del cuestionario a contenidos, casi en su totalidad, físicos y matemáticos. De esta manera, el objetivo primordial de la tarea 9, es explorar el uso que dan, los futuros profesores, a la derivada en la economía; esto es, su conocimiento de la derivada en el contexto económico y financiero. En este sentido, esta tarea es evaluadora del conocimiento especializado de los futuros profesores, ya que para su resolución, requiere del uso de la derivada como *coste marginal*.

Cabe señalar, que tanto en economía y como en finanzas, *el coste marginal* es entendido como el incremento que sufre el coste cuando se incrementa la producción en una unidad; es decir, el incremento del coste total que supone la producción adicional de una unidad de un determinado bien. Así, el coste marginal mide la tasa de variación del coste total dividida por la variación de la producción. Matemáticamente esto se puede escribir como sigue: Si $CT$ es la función que representa el coste total de producir $Q$ unidades de un bien, entonces el costo marginal $CM_a$ está dado por $CM_a = \frac{dCT}{dQ}$.

**Figura 18 –** Tarea 9 del *Cuestionario FE-CDM-Derivada*

Tarea 9

En una empresa el coste total de producir $q$ unidades viene dado por la función $C(q) = \frac{1}{3}q^3 - 12q^2 + 150q + 2304$.

a) Halla las funciones que determinan el coste total medio y el coste marginal.
b) Determina el coste marginal y el coste total medio cuando la producción es de 3 y de 6 unidades.

### *4.10. Tarea 10: Modelación*

De acuerdo con las observaciones de algunos de los expertos que participaron en el estudio de juicio de expertos, la versión piloto del cuestionario exploraba muy poco aspectos referentes a la modelación y se le daba muy poco peso al papel que juegan las representaciones verbales. En palabras de uno de los expertos, "*…es que es necesario incluir actividades que se relacionan con la modelación. Entre ellas están los problemas de optimización y los de razón instantánea de cambio… me parece que debería incluirse algún problema en el que las expresiones verbales jueguen un papel más importante…*" (E1). En este sentido, la tarea 10 (Figura 19) tiene por objetivo explorar aspectos del conocimiento especializado de los futuros profesores, relacionados con el uso de representaciones verbales y simbólicas (principalmente), justificaciones y la modelación la cual, como señalan Godino, Batanero y Font (2007), es un "mega proceso" puesto que implica procesos más elementales como los de representación, argumentación, idealización, generalización, etc. El significado de la derivada asociado al conocimiento de los futuros profesores que se pretende explorar es el de razón instantánea de cambio.

**Figura 19 –** Tarea 10 del *Cuestionario FE-CDM-Derivada*

Tarea 10

La energía cinética de un objeto es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad y se ha encontrado experimentalmente que la constante de proporcionalidad es un medio de su masa. ¿Cuál es la rapidez de cambio de la energía cinética con respecto a la velocidad cuando $v = 0\ ^{mts}/_{seg}$? Justifica tu respuesta.

### *4.11. Tarea 11: Optimización*

Al igual que en la tarea anterior, la tarea 11 (Figura 20) evalúa el conocimiento especializado de los futuros profesores, ya que para su resolución los profesores deben hacer uso de la modelación, la cual como vimos anteriormente, es un “mega proceso” que involucra procesos más simples como los de representación, argumentación, generalización, etc. El uso de las representaciones verbales adquieren un rol principal para la resolución del problema, teniendo que pasar del lenguaje verbal al simbólico. El problema es una variante del problema clásico de optimización de Fermat.

**Figura 20 –** Tarea 11 del *Cuestionario CDM-Derivada*

| |
|---|
| <u>Tarea 11</u><br>¿Es posible encontrar dos números cuya suma sea 120 y el producto del primero por el cuadrado del segundo sea máximo? Si es así, ¿cuáles serían dichos números? Explica tu razonamiento. |

## 5. Consideraciones finales

Uno de los intereses principales que persiguen las investigaciones que versan sobre el conocimiento de los profesores es caracterizar los conocimientos que un profesor de matemáticas debería tener para gestionar adecuadamente los aprendizajes de sus estudiantes. Sin embargo, son pocas las investigaciones orientadas al diseño de instrumentos y la búsqueda de pautas y criterios que ayuden a describir y potenciar dichos conocimientos.

Con esta investigación hemos querido avanzar en esta dirección mediante el diseño y aplicación de un instrumento que nos ayude a describir de manera sistemática, si bien no todo, una pieza clave del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores a propósito de un tópico específico: la derivada. En este artículo se presenta la primera de dos partes, en las que hemos dividido nuestra investigación para dar a conocer los resultados, la cual refiere al diseño de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada de profesores en formación inicial. El diseño del cuestionario que aquí presentamos, puede decirse que se desarrolló en tres momentos o etapas genéricas. En primer lugar, con base en el significado global de la derivada reconstruido, y de aspectos relevantes que nos aportó el estudio de la literatura sobre didáctica del cálculo diferencial, propusimos una serie de criterios que nos permitieron la selección intencional de las tareas que conformaron la primera versión del cuestionario. Estos criterios se operativizan, en esta etapa del diseño, con la noción de *configuración epistémica*, herramienta metodológica que nos aporta el enfoque onto-semiótico, la cual nos permitió realizar el análisis de los conocimientos que se ponen en juego con cada tarea (conocimientos esperados). En la segunda parte, veremos que estos criterios se pueden operativizar mediante el uso que los futuros profesores podrían hacer, de diversas *configuraciones cognitivas* o, inclusive, el uso de diferentes elementos de configuraciones cognitivas (representaciones, proposiciones, procedimientos, argumentos, significados parciales de la derivada, etc.). Durante esta primera etapa se plantearon soluciones plausibles a cada uno de los ítems del cuestionario y se realizó un análisis exhaustivo de los conocimientos que esperábamos que los futuros profesores pusieran en juego, lo que delimitaba la validez de contenido de nuestro cuestionario.

La segunda etapa, fue la aplicación del cuestionario diseñado, y que denominamos *Cuestionario FE-CDM-Derivada*, a una muestra de 53 futuros profesores de bachillerato de una universidad mexicana. Esta primera aplicación, o aplicación piloto del cuestionario, nos proporcionó evidencias sobre los conocimientos sobre derivadas, referentes a la faceta epistémica del CDM, que los futuros profesores tenían efectivamente casi al término de su formación. Respecto de los conocimientos de los futuros profesores hablaremos en el segundo artículo. Además de dicha evidencia, referente a los conocimientos que "poseen" los futuros profesores, los resultados de la aplicación nos proporcionaron pautas para realizar algunas modificaciones en la "versión piloto".

Un tercer momento, realizado casi paralelamente al segundo, fue el estudio mediante la triangulación de expertos, el cual presentamos en el apartado 3. Los resultados, aunados a los resultados de la etapa anterior, dieron pautas para considerar algunas modificaciones de la versión piloto y, atendiendo a sugerencias de los investigadores consultados, añadimos algunas tareas que se describen en el apartado 4. Con el desarrollo de esta etapa, estudio mediante el juicio de expertos, se garantizó y consolidó la validez de contenido de nuestro cuestionario.

Es importante aclarar que el análisis del contenido (análisis epistémico) de las tareas, no es único ni pretende ser exhaustivo. Otras respuestas a las tareas, distintas a las que contemplamos, podrían ser sugeridas; por lo que estas nuevas respuestas, así como otros tipos de análisis, podrían centrar su atención, o identificar, otro tipo de procesos que involucren otros objetos matemáticos con sus significados correspondientes. Este hecho atiende a uno de los supuestos primordiales de nuestro marco teórico (EOS) que refiere al carácter relativo del conocimiento matemático. Sin embargo, con los estudios a priori realizados quedó demostrado que tanto las respuestas planteadas como los análisis de contenido, se adecuan a lo que el *Cuestionario FE-CDM-Derivada* pretende evaluar. Carmines y Zeller (1979, p. 20; citado en Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 188) señalan que para demostrar la validez del contenido de un instrumento debe demostrarse que éste, de manera global e imparcial, recorre el dominio o temas que se pretenden cubrir. En este sentido, tanto el análisis de los contenidos de cada una de las tareas, así como la evaluación del *Cuestionario CDM-Derivada* por expertos en el campo de didáctica del cálculo, responden a este tipo de validez de nuestro instrumento.

Así, la técnica de análisis denominada análisis semiótico (Godino, 2002; Malaspina y Font, 2010; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011) y el análisis de contenido realizado previo a la aplicación piloto del cuestionario, nos permitió observar y describir de manera sistemática tanto la actividad matemática que se espera realicen los futuros profesores al resolver cada una de las tareas, como los objetos matemáticos primarios (elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que se espera movilicen en sus prácticas para resolver las tareas (Godino, Batanero y Font, 2007). Hay que señalar que la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático depende de la presencia o ausencia de los objetos matemáticos, sus significados y relaciones entre los mismos. Un adecuado nivel de conocimiento del contenido especializado se refleja en la diversidad de objetos matemáticos primarios, sus significados, y los vínculos que establecen entre éstos, a propósito de la solución de una tarea sobre derivadas.

En este sentido, una de las características fundamentales de los ítems sobre el conocimiento del contenido especializado, incluidos en el cuestionario, es la reflexión, de los futuros profesores, sobre los objetos matemáticos, sus significados y las relaciones complejas entre ellos, que se ponen en juego con motivo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las relaciones entre objetos y significados se concreta, como hemos señalado, mediante la noción de configuración de objetos y procesos (Godino, et al., 2007). Dicha noción favorece no sólo la identificación sistemática de diferentes procedimientos de resolución, modalidades de expresión, conceptos y propiedades que se ponen en juego en su formulación, sino también la identificación de argumentaciones o justificaciones de los procedimientos y las propiedades. Además, el análisis del tipo de tarea propuesta y de las variables didácticas que intervienen en la misma, orientan la reflexión sobre posibles generalizaciones, o particularizaciones, y las conexiones con otros contenidos matemáticos (Godino, 2009).

De esta forma, los resultados obtenidos a partir de los análisis, cuantitativo y cualitativo, de las resoluciones que los futuros profesores dieron a las tareas incluidas en el cuestionario, señalan que éstos exhiben ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento del contenido especializado y ampliado sobre la derivada, e inclusive con los ítems sobre conocimiento común del contenido tales como el *2a.* Resultados más profundos referentes a conocimiento referente a la faceta epistémica del CDM sobre la derivada de los profesores en formación inicial, se presentarán en el segundo artículo (segunda parte de esta investigación) cuando se describa la aplicación definitiva de nuestro instrumento y el análisis de los resultados obtenidos de dicha aplicación.

Finalmente, las tareas suprimidas de la versión piloto del cuestionario, podrían explorarse en otros trabajos de investigación, en los cuales se consideren factores como más tiempo, si es que se aplica el instrumento en su totalidad, para tratar de responder a alguna de las hipótesis sobre su no resolución en nuestro estudio exploratorio.

## *Agradecimientos*

Esta investigación ha sido desarrollada en el marco de los proyectos de investigación sobre formación de profesores: EDU2012-32644 (Universidad de Barcelona) and EDU2012-31869 (Universidad de Granada).

## Referencias

ARTIGUE, M. La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In: ARTIGUE, M.; DOUADY, R.; GÓMEZ, P. (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática* (p. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995.

ARTIGUE, M.; BATANERO, C.; KENT, P. Mathematics thinking and learning at post-secondary level. In: LESTER, F. K. (Ed.). *Second Handbook of Research on*

*Mathematics Teaching and Learning* (p. 1011-1049). Charlotte, N.C: NCTM and IAP, 2007.

BADILLO, E. La *derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, España, 2003.

BADILLO, E.; AZCÁRATE, C.; FONT, V. Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f'(a) y f'(x) en profesores de matemáticas [Analysing the extent to which mathematics teachers understand the objects f'(a) and f'(x)]. *Enseñanza de las Ciencias*, v. 29, n. 2, p. 191-206, 2011.

BALL, D. L. Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, v. 51, p. 241-247, 2000.

BALL, D. L.; BASS, H. With an eye on the mathematical horizont: Knowing mathematics for teaching to learnes' mathematical futures. Paper presented at the *43Rd Jahrestagung Für Didaktik Der Mathematik Held in Oldenburg,* Germany, 2009.

BALL, D. L.; HILL, H. C.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator,* v. 29, p. 14-22, 2005.

BALL, D. L.; LUBIENSKI, S. T.; MEWBORN, D. S. Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In: RICHARDSON, V. (Ed.). *Handbook of research on teaching* (4th ed., p. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association, 2001.

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, v. 59, n. 5, p. 389-407, 2008.

BINGOLBALI, E.; MONAGHAN, J. Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics*, v. 68, n. 1, p. 19-35, 2008.

BISHOP, A.; CLEMENTS, K.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LEUNG, F. (Eds.). *Second* International *handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer A. P., 2003.

ÇETIN, N. The ability of students to comprehend the function-derivative relationship with regard to problems from their real life. *PRIMUS*, v. 19, n. 3, p. 232-244, 2009.

COHEN, L.; MANION, L.; MORRISON, K. *Research methods in education*. London and New York: Routledge, 2011.

DELOS SANTOS, A. *An investigation of students' understanding and representation of* derivative *in a graphic calculator-mediated teaching and learning environment*. Doctoral thesis: University of Auckland, New Zealand, 2006.

ENGLISH, L. D.; BARTOLINI-BUSI, M.; JONES, G. A., LESH, R.; TIROSH, D. *Handbook of International research in mathematics education*. London: Lawrence Erlbaum Ass, 2002.

FENNEMA, E.; FRANKE, M. L. Teachers' knowledge and its impact. In: GROUWS, A. (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 147-164). New York, NY, England: Macmillan, 1992.

FONT, V. Procediments *per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a la derivada* [Procedures for obtaining symbolic expressions from graphs: Applications in relation to the derivative]. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España, 1999.

FONT, V. Rappresentazioni attivate nel calcolo della derivata. *Atti del Convegno di Didáctica della Matematica*. Alta Scuola Pedagogica: Locarno, Suiza. p. 13-24, 2008.

FRANKE, M. L.; KAZEMI, E.; BATTEY, D. Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In: LESTER, F. K. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and* Learning (p. 225-256). Charlotte, N.C: NCTM and IAP, 2007.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 22, n. 2/3, p. 237-284, 2002.

GODINO, J. D. Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, v. 20, p. 13-31, 2009.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, v. 39, n. 1, p. 127-135, 2007.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M.; LURDUY, O. Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. Educational *Studies in Mathematics*, v. 77, n. 2, p. 247-265, 2011.

GODINO, J. D.; PINO-FAN, L. The mathematical knowledge for teaching: a view from the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. *Eighth Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME 8). Antalya, Turkey, 2013. Acceso el: 14 de febrero de 2013 de <http://www.cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/wg17_papers.html>

HABRE, S.; ABBOUD, M. Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 25, p. 52-72, 2006.

HÄHKIÖNIEMI, M. Perceptual and symbolic representations as a starting point of the acquisition of the derivative. In: HOINES, M. J.; FUGLESTAD, A. B. (Eds.).

*Procceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (v. 3, p. 73-80). Bergen, Norway: PME, 2004.

HÄHKIÖNIEMI, M. *The role of representations in learning the derivative*. Tesis doctoral, University of Jyväskylä, Finland, 2006.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHLLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 39, p. 372-400, 2008.

HILL, H. C.; SLEEP, L.; LEWIS, J. M.; BALL, D. L. Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters. In: LESTER, F. K. (Ed.). *Second Handbook of Research on* Mathematics *Teaching and Learning*. (p. 111-156). Charlotte, N.C: NCTM and IAP, 2007.

HILL, H. C.; SCHILLING, S.; BALL, D. L. Developing measueres of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, v. 105, n. 1, p. 11-30, 2004.

LLINARES, S.; KRAINER, K. Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (p. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers, 2006.

MALASPINA, U.; FONT, V. The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics*, v. 75, p. 1, p. 107-130, 2010.

PHILIPP, R. Mathematics teachers' beliefs and affect. In: LESTER, F. K. (Ed.). *Second handbook of* research *on mathematics teaching and learning* (p. 257-315). Charlotte, NC: Information Age Pub, 2007.

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D.; FONT, V. Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada [The epistemic facet of mathematical and didactic knowledge about the derivative]. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 13, n. 1, p. 141-178, 2011.

PONTE, J. P.; CHAPMAN, O. Mathematics teachers' knowledge and practices. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (p. 461-494). Rotterdam: Sense Publishers, 2006.

ROWLAND, T.; RUTHVEN, K. (Eds.). *Mathematical Knowledge in Teaching, Mathematics Education Library 50*. London: Springer, 2011.

SÁNCHEZ, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 11, n. 2, p. 267-296, 2008.

SANTI, G. Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, v. 77, n. 2-3, p. 285-311, 2011.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, v. 57, n. 1, p. 1-22, 1987.

SOWDER, J. T. The mathematical education and development of teachers. In: LESTER, F. K. (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (p. 157-223). Charlotte, N.C: NCTM and IAP, 2007.

SULLIVAN, P.; WOOD, T. (Eds.). The international handbook of mathematics teacher education. Volume 1: *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development.* Rotterdam: Sense Publishers, 2008.

TSAMIR, P.; RASSLAN, S.; DREYFUS, T. Prospective teachers' reactions to Right-or-Wrong tasks: The case of derivatives of absolute value functions. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 25, n. 240-251, 2006.

VIHOLAINEN, A. Finnish mathematics teacher student's informal and formal arguing skills in the case of derivative. *Nordic Studies in Mathematics Education*, v. 13, n. 2, p. 71-92, 2008.