REVISTA EMA
2001, VOL. 6, Nº 2, 180-200

REFLEXIONES DIDÁCTICAS DESDE Y PARA EL AULA

EXPRESIONES SIMBÓLICAS A PARTIR DE GRÁFICAS. EL CASO DE LA PARÁBOLA

VICENÇ FONT

En el artículo *¿Cómo identificar funciones polinómicas?* publicado en la sección "Reflexiones didácticas desde y para el aula" del anterior número de esta revista, se formulan tres preguntas, a saber:

- ¿Es posible determinar si una curva, trazada en un plano cartesiano, representa una parábola?
- ¿Cómo determinar qué función, descrita por un polinomio de grado mayor o igual a tres, está representada por una determinada gráfica?
- ¿El tipo de comportamiento de las diferencias de las imágenes de una función polinómica puede ser utilizado para reconocer el tipo de función, aún si las diferencias de valores de las preimágenes no es constante?

Las dos primeras se refieren a la traducción: gráfica ⇒ expresión simbólica.

En este artículo voy a limitarme a intentar responder a la pregunta sobre la parábola. Para ello formularé tres reflexiones; las dos primeras configuran un contexto problemático donde se ubica la pregunta que se va a contestar, mientras que la última introduce la respuesta en sí.

IMPORTANCIA DE LAS TRADUCCIONES ENTRE DIFERENTES REPRESENTACIONES

Mi primera reflexión tiene que ver con la pregunta ¿por qué conviene diseñar actividades en las que los alumnos[1] tienen que realizar traducciones entre diferentes representaciones?

1. Todas las referencias a los alumnos están referidas a alumnos de bachillerato de la comunidad autónoma de Catalunya (España). Las edades de estos alumnos están entre 16-18 años.

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas se han realizado muchas investigaciones para precisar el término *representación* y para estudiar el papel que juegan las diferentes representaciones en el proceso de comprensión de los contenidos matemáticos (v.g., Brown, 1996; Duval, 1995; Font, 2000; Janvier, 1987; Kaput, 1987 y 1991; Romero y Rico 1999). La mayoría de estos autores están de acuerdo en que la naturaleza de las representaciones matemáticas ostensivas[2] influye en el tipo de comprensión generada en el alumno; y, recíprocamente, el tipo de comprensión del alumno determina el tipo de representación ostensiva que puede utilizar.

La terminología que normalmente se usa en este tipo de investigación proviene de la lingüística, de la semiótica y de la fenomenología.

En la terminología que ha generado la lingüística, los sistemas matemáticos de signos se consideran los significantes que representan los conceptos matemáticos (significados).

En semiótica se utilizan los términos *expresión* y *contenido* de un signo (o función semiótica); cuando una persona interpreta o comprende un signo, actúa el par *expresión/contenido*, o sea, la expresión remite a un contenido; la función semiótica se puede considerar una función que a una expresión le hace corresponder un contenido.

Brown se basa en la fenomenología social de Schutz y considera la representación como una relación entre dos fenómenos que pueden ser materiales o mentales:

> En el presente contexto, me referiré a la noción primitiva de "signo" tal como la describe C.S. Peirce (...) la cual hace referencia a un aparejamiento individual entre dos fenómenos asociados. El signo de Saussure apareja dos fenómenos mentales. Peirce considera la posibilidad que los fenómenos sean mentales o físicos. La noción de Schutz de *appresentation* desarrolla el punto de vista de Peirce para poder examinar la manera en que las personas asocian parejas de elementos. (Brown 1996, p. 133).

Schutz, siguiendo a Husserl y también a Peirce, distingue entre aquello que se presenta propiamente a la consciencia (*appresenting*) y aquello con lo que se relaciona (*appresented*), que muchas veces sólo está presente simbólicamente. Para referirse a las situaciones en las que actúa el par *appresenting/ appresented*, Schutz utiliza la expresión *appresentational situationes*.

Las investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las funciones han servido para mostrar la importancia de la traducción entre diferentes representaciones. Janvier (1987), en sus trabajos sobre el concepto de función,

2. Utilizo el término ostensivo en el sentido de que se puede mostrar a otro directamente. Por representación ostensiva entiendo, por ejemplo, la fórmula de la función que el profesor escribe en la pizarra y el alumno ve directamente.

considera que las representaciones (aquí llamadas representaciones ostensivas) asociadas al concepto de función se pueden clasificar en cuatro clases (expresión verbal, tabla, gráfica, y expresión analítica) que, aunque idealmente contienen la misma información, ponen en función diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas, y es básica para interpretar y relacionar las otras tres; la representación en forma de tabla se relaciona con el pensamiento numérico; la representación gráfica se conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología; mientras que la expresión analítica se conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra.

Las ideas de Janvier, gracias a su poder explicativo y relacional, han servido de base a muchas investigaciones posteriores sobre la didáctica de las funciones y se han concretado en materiales (v.g., Shell Centre for Mathematical Education, 1990) que han cambiado la manera de trabajar las funciones en las aulas. Janvier, entre otros, considera que el aprendizaje de las funciones no se ha de limitar al de una sola de estas formas de representación, sino que ha de incluir la capacidad de traducir la información de una representación a otra.

Una forma de organizar las traducciones entre las diferentes formas de representación es la tabla siguiente, que es una adaptación de la utilizada por Janvier.

hacia **desde**	**Situación, Descripción verbal**	**Tabla**	**Gráfica**	**Expresión analítica**
Situación, Descripción verbal	Distintas descripciones	Estimación/ cálculo de la tabla	Boceto	Modelo
Tabla	Lectura de las relaciones numéricas	Modificación de la tabla	Trazado de la gráfica	Ajuste numérico
Gráfica	Interpretación de la gráfica	Lectura de la gráfica	Variaciones de escalas, unidades, origen, etc.	Ajuste gráfico
Expresión analítica	Interpretación de la fórmula (interpretación de parámetros)	Cálculo de la tabla dando valores	Representación gráfica	Transformaciones de la fórmula

Tabla Adaptación de la tabla propuesta por C. Janvier

Esta tabla contempla las posibles traducciones de una forma de representación a otra, así como las traducciones dentro de la misma forma de representación, que son las de la diagonal. La tabla pone de manifiesto la multiplicidad de relaciones que se pueden establecer entre las diferentes formas de representar una función. El paso de una a otra puede ampliar y reorganizar la información que está implícita en una de las formas de representación.

Mi segunda reflexión es más concreta y tiene que ver con la pregunta ¿por qué conviene diseñar actividades en las que los alumnos tienen que realizar la traducción: gráfica ⇒ expresión simbólica?

Si bien sería deseable que los alumnos trabajasen la traducción entre todos los diferentes tipos de representaciones de las funciones, la introducción de las calculadoras graficadoras y de los programas informáticos en la enseñanza permite automatizar y, por tanto, facilitar y simplificar algunas de las posibles traducciones entre las representaciones.

Según García (1994), si en la tabla se consideran las traducciones que se pueden fácilmente automatizar, gracias a las calculadoras graficadoras, software para graficación y otros programas informáticos, se pueden reconocer cuatro que se presentan por medio de flechas en la Figura Nº 1. La Figura Nº 2 pone de manifiesto cuáles son las traducciones que resultan más difíciles de automatizar y que, por lo tanto, necesitan ser más trabajadas; estas últimas, hasta el momento, son precisamente las que menos se trabajan en las clases.

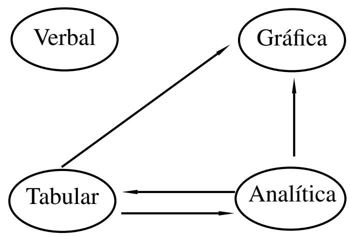


Figura Nº 1.

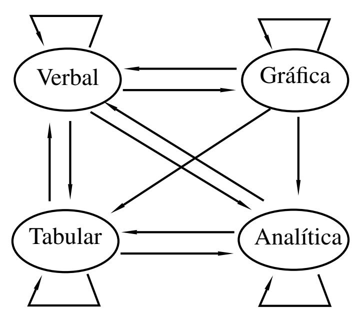


Figura Nº 2.

Mi opinión personal es que la ubicación de los bucles en la representación gráfica, tabular y simbólica en la Figura Nº 2, tal como propone García (1994), es discutible; el software existente y las capacidades de las calculadoras y ordenadores, permite ya automatizar estos procesos.

Con relación a las reflexiones anteriores mi conclusión es que en la actividad matemática se han de resolver problemas utilizando determinadas técnicas. Estas técnicas necesitan un conjunto organizado de objetos matemáticos que las justifiquen y se plasman en un conjunto de notaciones que son utilizadas en determinadas prácticas. Las diferentes formas ostensivas que pueden representar a un objeto matemático (o sistema organizado de objetos) son el resultado de una larga historia en la que, en algunos casos, una nueva forma de representación plasma un nuevo programa de investigación[3]. Este conjunto de prácticas se puede parcializar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto y con un determinado tipo de notación, produciendo un determinado sentido. Un cambio de notación puede activar un sentido diferente que pueden facilitar o dificultar la resolución de la actividad. Por este motivo considero que las diferentes representaciones ostensivas de los objetos matemáticos y las traducciones entre ellas son un elemento fundamental para su comprensión y, por tanto, para su enseñanza y aprendizaje.

LA TRADUCCIÓN ENTRE GRÁFICAS Y EXPRESIONES SIMBÓLICAS. UNA BREVE APROXIMACIÓN HISTÓRICA

Cada una de las cuatro formas de representar una función tiene una génesis histórica diferente y, por lo tanto, un estudio histórico de los métodos y procedimientos que se han utilizado para calcular la expresión analítica a partir de gráficas, puede dar ideas utilizables en el aula.

Si bien las curvas están presentes en toda la historia de las matemáticas, uno de los momentos en que se plantea claramente el paso de la gráfica de la curva a su expresión simbólica es en el momento del nacimiento de la Geometría Analítica. La lectura de obras como *La Géométrie* (Descartes 1981)[4] ayudan a entender mejor cómo se puede pasar de la gráfica a la expresión analítica y, por lo tanto, puede dar muchas ideas aplicables en el aula.

En el primer apartado del segundo libro de *La Géométrie*, Descartes se cuestiona acerca de cuáles son las líneas curvas que se pueden admitir en geometría, y se pregunta por qué los antiguos no distinguieron diversos grados entre las líneas más complejas y por qué llamaron mecánicas a algunas

3. Utilizo la expresión "programa de investigación" en el sentido de Lakatos (1983). Según Lakatos un programa de investigación está formado por: un núcleo firme o "centro firme" del programa; un cinturón protector de hipótesis auxiliares; y, la heurística, o conjunto de procedimientos aplicables a la solución de los problemas.
4. Me he centrado en los trabajos de Descartes y no en los de Fermat porque, a mi entender, Descartes tiene por objetivo obtener expresiones simbólicas a partir de curvas, mientras que Fermat utiliza las ecuaciones para representar curvas.

de ellas. En este primer apartado también divide las curvas en mecánicas y geométricas. Para Descartes, una curva es geométrica si se puede imaginar descrita por un movimiento continuo o bien por varios movimientos sucesivos de manera que los últimos vengan determinados por los anteriores, mientras que las curvas mecánicas son las que resultan de dos movimientos independientes que no guardan entre sí una relación que pueda ser medida.

Para clarificar lo que entiende por curva geométrica, Descartes construye un instrumento que le permite dibujar una serie de curvas más complejas que las cónicas, y que, según él, tienen el mismo derecho a la naturaleza geométrica y a ser estudiadas como las secciones cónicas. La curva geométrica es para Descartes la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre una regla se transmite por diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva. Esta manera de entender la curva —y la introducción implícita del sistema de coordenadas— hace que Descartes pueda encontrar la expresión algebraica de la curva; también le lleva a definir claramente las curvas —llamadas por él geométricas— como el objeto de lo que después se va a llamar Geometría Analítica, al igual que la teoría de las ecuaciones como la técnica que se ha de utilizar para estudiarlas.

Los trabajos de Descartes son muy interesantes porque parten de las dos metáforas[5] clásicas sobre las curvas:

- las curvas son secciones; y,
- las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones;

para añadir una tercera:

- las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones. El análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva.

Hasta principios del siglo XIX, cuando Cauchy empieza la reorganización del análisis infinitesimal, esta última metáfora es la que se puede encontrar en los libros de análisis infinitesimal. Es decir, hasta la aritmetización del análisis, las gráficas de funciones eran consideradas como la trayectoria descrita por un punto en movimiento, la cual se podía expresar por una fórmula.

5. Utilizo el término metáfora tal como lo utilizan Lakoff, Johnson y Núñez (Lakoff y Johnson, 1991; Lakoff y Núñez, 2000; Núñez, 2000). Estos autores consideran que *la esencia de la metáfora es entender y experimentar un tipo de cosa en términos de otra.* (Lakoff y Johnson, 1991, p. 41).

Esta manera de entender las gráficas de funciones queda muy clara en la obra de Newton dónde se encuentran constantes referencias a un punto que se mueve sobre una parábola, una hipérbola, etc.

A partir de los trabajos de Fourier, Cauchy y Dirichlet, entre otros, se aceptaron como gráficas de funciones curvas que no podían ser trayectorias. Con la posterior aplicación de la teoría de conjuntos a las funciones, terminó de coger cuerpo la metáfora conjuntista:

- La gráfica de una función f es el conjunto formado por los puntos de coordenadas $(x, f(x))$.

La diversidad de acepciones sobre las curvas lleva a reconocer que en el diseño de las actividades pensadas para obtener la fórmula de una función a partir de su gráfica conviene considerar las diferentes metáforas que históricamente han estructurado el concepto de gráfica de una función.

Actualmente hay programas informáticos, fácilmente utilizables en el aula, que permiten trabajar este tipo de metáforas. La metáfora que considera que las gráficas de las funciones son la traza de un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones puede ser recuperada para la enseñanza gracias a micromundos como el *Cabri-géomètre*[6]. Una variación de esta metáfora: la gráfica de una función es la traza de un punto que se mueve siguiendo la gráfica, se puede trabajar con programas como el *Calcula*[7].

EL CASO DE LA PARÁBOLA

Mi tercera reflexión tiene que ver con la pregunta: ¿cuál de las metáforas que históricamente han estructurado el concepto de gráfica de una función es la que me permite obtener la expresión simbólica de una parábola a partir de su gráfica?

Como se verá adelante, la respuesta a ésta depende de si la gráfica se encuentra sobre un plano con ejes graduados o sin graduación.

6. *Cabri-géomètre* (de Cahier Brouillon Interactif pour l'aprentissage de la géométrie) es un programa desarrollado en el Laboratorio de estructuras discretas y de Didáctica del IMAG (Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble) de la Universidad Joseph Fourier de Grenoble.
7. *Calcula,* software desarrollado por M. Oliveró y J, Abrev, es un graficador que permite efectuar los pasos siguientes:
   - Dibujar la gráfica de una función f.
   - Por un punto cualquiera $x = a$ dibujar la recta tangente a la gráfica de la función f, con un triángulo de base 1 y de altura igual a la pendiente de la recta tangente $(f'(a))$.
   - Mover el punto anterior sobre la gráfica de la función f utilizando el teclado (o el ratón) del ordenador para obtener diferentes valores de $f'(a)$

Gráficas sobre planos con ejes graduados

Si la gráfica objeto de estudio está trazada sobre un plano con los ejes graduados, y consideramos la gráfica como un todo estático formado por puntos $(x, f(x))$ donde $f(x)$ es una expresión simbólica que para cada valor de la x permite obtener su correspondiente imagen, la estrategia para obtener esta expresión simbólica consiste en:

1) Elegir el tipo de función de ajuste; es decir, elegir una familia de funciones $f(x;\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$; en cuya expresión figuran k parámetros.
2) Determinar los parámetros $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

Por ejemplo, para que un alumno identifique la fórmula de una gráfica como la Figura Nº 3, tiene que seguir el siguiente procedimiento:

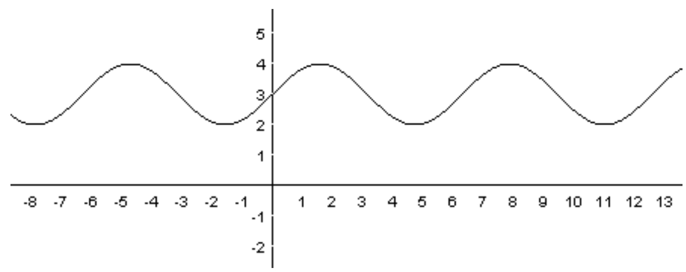


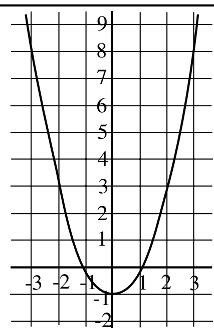
Figura Nº 3.

1) Identificar ésta como una gráfica de una función trigonométrica.
2) Dentro del grupo de las funciones trigonométricas escoger la familia representada por la expresión $f(x) = a \operatorname{sen}(bx) + c$.
3) Determinar el valor de los parámetros *a*, *b*, y *c*.

Para poder encontrar la expresión analítica correspondiente a la gráfica de la Figura Nº 3, el alumno tiene que utilizar —entre otros— sus conocimientos sobre: las funciones trigonométricas en general, la función seno en particular, la relación entre las variaciones de los parámetros y las variaciones de las gráficas.

La mayoría de los alumnos tiene muchas dificultades para realizar el procedimiento anterior y para utilizar aquéllos conocimientos. La explicación de estas dificultades hay que buscarla, entre otras causas, en la falta de actividades de este tipo en los problemas escolares que los alumnos han resuelto anteriormente. Las actividades escolares en las que los alumnos trabajan las funciones, normalmente hacen referencia a funciones concretas consideradas aisladamente, y no como miembros de familias de funciones. En estas actividades se trabajan relativamente poco las transformaciones de las funciones, y aun se trabaja menos el paso de la gráfica a la expresión analítica de una función.

La determinación de estos parámetros en el caso de la parábola se puede hacer utilizando diferentes procedimientos, los cuales dependen del tipo de instrucción que han recibido los alumnos. En una investigación realizada con alumnos de 16 años (Font, 2000) se documentan básicamente dos estrategias (interpolación, y, familia de funciones y transformaciones) para solucionar la siguiente situación:



Halla la fórmula de la función que tiene la gráfica anterior:

Respuesta: $f(x)$ =...................

Justificación de la respuesta

1) Interpolación: Este método consiste en construir una tabla de valores (generalmente pocos) a partir de la gráfica, y encontrar una fórmula tal que dichos valores la cumplan. Este procedimiento, en muchos casos, es poco consciente y básicamente consiste en hacer una suposición implícita de fórmula de segundo grado a partir de unos pocos valores de la tabla para confirmarla o invalidarla a partir del resto de valores.

En la mayoría de los casos, las respuestas de los alumnos que utilizan este procedimiento se limitan a incluir una tabla de valores sin hacer referencia al reconocimiento de la gráfica como la de una función de una determinada familia de funciones. El siguiente es un ejemplo de una respuesta dada utilizando este procedimiento:

Respuesta: $f(x) = x^2 - 1$

Justificación de la respuesta

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	3	0	-1	0	3	8

Algunas respuestas más elaboradas hacen referencia explícita a que la fórmula ha de ser de grado dos por el tipo de gráfica, y utilizan la tabla de valores para completar la fórmula. Las justificaciones que presentan estos últimos alumnos son del tipo "siempre es el cuadrado menos uno".

Este procedimiento de interpolación da resultado con funciones de segundo grado muy sencillas, pero no lo da con funciones más complicadas.

2) Familia de funciones y transformaciones: Este método consiste en reconocer la gráfica como una gráfica de la familia de funciones de segundo grado y utilizar las trasformaciones de las gráficas para hallar y justificar la fórmula. La siguiente respuesta es un ejemplo de este tipo de procedimiento:

Respuesta: $f(x) = x^2 - 1$

Justificación de la respuesta

Es una parábola, elevado
al cuadrado y como que es
un lugar hacia abajo, -1

Además de los dos procedimientos anteriores, hay otros minoritarios, como es el caso del alumno que dio la siguiente respuesta:

Respuesta: $f(x) = x^2 - 1$

Justificación de la respuesta

$m = \frac{1}{1} = 1$

$b = -1$

En esta respuesta el alumno intenta hallar la fórmula de la parábola utilizando la misma técnica que ha utilizado en el caso de las rectas; es decir, utilizar el modelo $y = mx + n$, empleado en preguntas que implicaban hallar la fórmula de gráficas que tenían forma de recta. En efecto, este alumno había utilizado que la pendiente (*m*) es el aumento vertical dividido por el aumento horizontal y que la ordenada del punto de corte de la recta con el eje de las ordenadas corresponde al valor de *n*.

Pero lo que es más destacable es que lo hace correctamente, ya que calcula el aumento vertical dividido por el aumento horizontal, no entre dos puntos cualesquiera, sino que lo calcula entre el vértice y un punto de la parábola situado una unidad hacia la derecha, con lo que obtiene correctamente el coeficiente de x^2. Este procedimiento es válido porque el coeficiente a en la expresión $f(x) = a(x-p)^2 + q$, es la pendiente de la recta que pasa por el vértice (p, q) y por el punto $(p+1, f(p+1))$ de la parábola. En efecto, si $f(x) = a(x-p)^2 + q$ entonces $f(p+1) = a(p+1-p)^2 + q = a + q$; en consecuencia la pendiente entre los puntos es $\frac{f(p+1) - f(p)}{p+1-p} = \frac{a+q-q}{1} = a$.

Posteriormente, el mismo alumno aplicó este procedimiento para contestar correctamente a preguntas del mismo estilo.

Gráficas sobre planos con ejes sin graduación

La gráfica que se propone en el artículo *¿Cómo identificar funciones polinómicas?* (ver Figura Nº 4), es una gráfica con un sistema de ejes sin graduación, por lo que interpreto que la pregunta que en éste se plantea sobre la parábola, en el fondo es ¿cómo saber que la gráfica de la figura es una parábola, si no puedo encontrar una tabla de valores ni puedo utilizar de entrada que la expresión simbólica de esta función es del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ para luego determinar los parámetros a, b y c?

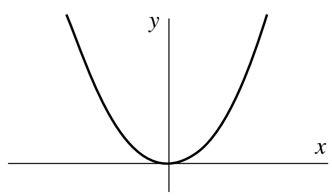


Figura Nº 4.

Esta pregunta no se puede contestar si solamente se contempla la metáfora que estructura la gráfica de una función como un todo estático formado por puntos $(x, f(x))$ donde $f(x)$ es una expresión simbólica que, para cada valor de la x, permite obtener su correspondiente imagen. Esta pregunta, en cierta forma, compromete una problemática parecida a la que se tenía en el momento del nacimiento de la Geometría Analítica, ya que en esta época no se conocían los sistemas de coordenadas ni la ecuación explícita de la parábola.

Estas condiciones obligan a utilizar también alguna de las otras metáforas que estructuraron históricamente el concepto de gráfica de una función. La metáfora "las curvas son secciones" no parece útil en este contexto, por lo que hay que intentar resolver la cuestión utilizando la metáfora "las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones. El análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva".

Si se quiere comprobar que la gráfica es una parábola, se ha de considerar un punto cualquiera de esta gráfica e intentar comprobar si este punto cumple alguna de las propiedades que conocemos de las parábolas.

Descartes, y también los antiguos griegos, sabía que si en una parábola se toma el segmento OB igual al segmento OC y se dibuja la recta que pasa por los puntos A y C, se obtiene la tangente que pasa por A (ver Figura Nº 5).

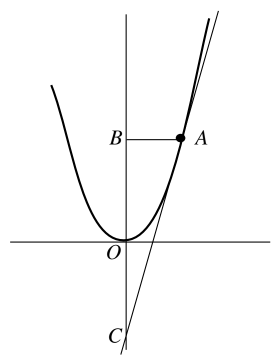


Figura Nº 5.

Si en la gráfica de la Figura Nº 4, dibujo sobre el eje vertical puntos B y C equidistantes de O y determino el punto A, la recta definida por C y A parece ser la tangente (ver Figura Nº 6).

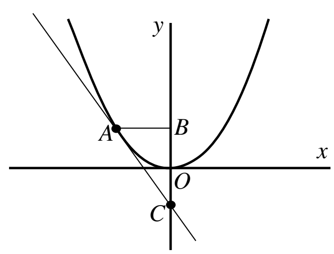


Figura Nº 6.

Este hecho hace que formule la siguiente pregunta ¿una curva que cumple esta condición es una parábola?

Antes de continuar, conviene hacer observar que la respuesta es afirmativa y que por medio de las ecuaciones diferenciales es muy fácil de demostrar, ya que la condición que cumplen todas las tangentes se puede simbolizar por medio de la ecuación diferencial $f\,'(x) = \dfrac{2f(x)}{x}$ que se puede resolver utilizando métodos de integración:

$$\int \frac{f\,'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{2}{x}dx$$

$$\Rightarrow \ln f(x) + C_1 = 2\ln x + C_2 \Rightarrow \ln f(x) - 2\ln x = C$$

$$\Rightarrow \ln\frac{f(x)}{x^2} = C \Rightarrow \frac{f(x)}{x^2} = k \Rightarrow f(x) = kx^2.$$

Pero si no se quiere utilizar munición de grueso calibre, ¿cómo se puede justificar que una curva que cumple esta condición es una parábola?

Creo que se puede dar una respuesta siguiendo a Descartes. Al final del primer libro de *La Géométrie*, afirma que si en una ecuación algebraica con dos incógnitas se asignan valores a una incógnita y se buscan los correspondientes valores de la otra, se hallarán infinitos puntos que describen una curva; sin embargo, Descartes no utiliza las ecuaciones para dibujar curvas. Para él, las curvas, más que el conjunto de puntos que cumplen una determinada ecuación, son el resultado de movimientos sucesivos de curvas más simples, de manera que los últimos vienen determinados por los anteriores. O sea, las curvas que aparecen en *La Géométrie* no son construidas a partir de una ecuación, sino que son generadas por el movimiento de un punto a partir del movimiento de curvas más simples. Lo que hace Descartes es considerar la curva generada a partir de curvas más simples, y a partir del estudio de estos movimientos halla la ecuación de la curva.

El proceso que explica el mismo Descartes para pasar de la curva a la ecuación es muy probable que estuviese complementado por un proceso heurístico que no está reflejado en *La Géométrie*. Este proceso, a mi parecer, se basa en la posibilidad de:

1) observar la gráfica que resulta de la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones, por ejemplo dibujándola con algún instrumento de dibujo preparado *ad hoc*;

2) identificar la gráfica como un miembro de una familia de curvas;

3) asignar a la gráfica una fórmula tipo; y,

4) encontrar esta fórmula estudiando las condiciones a las que está sujeto el punto.

Este proceso solamente es posible con una clasificación de las cónicas, a la cual Descartes ya había llegado como resultado de su solución al problema de Pappus.

Por lo tanto, teniendo en cuenta lo anterior, las preguntas serían ¿cómo generar una curva como resultado de movimientos más simples, de manera que todos sus puntos cumplan que el segmento OC es igual al segmento OB al dibujar la recta tangente? y —puesto que se puede suponer que se conoce que $y = kx^2$ es la fórmula de la parábola— ¿cómo justificar, a partir de la simbolización de estas condiciones, que la ecuación explícita que cumplen los puntos de la curva es del tipo $y = kx^2$?

La primera pregunta es relativamente fácil de responder, ya que la forma de generar esta curva no es difícil y con el Cabri-géomètre es relativamente simple preparar una construcción geométrica (ver Apéndice) que cumpla estas condiciones y tal que la traza del punto A que resulta al mover el punto P sea la de una parábola (ver Figura Nº 7).

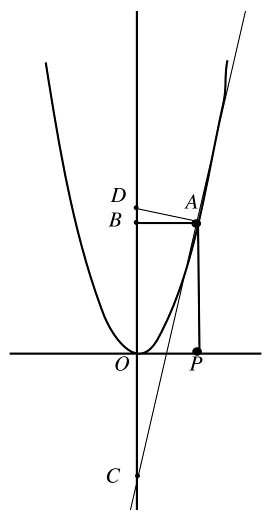


Figura Nº 7.

Los invariantes que puede observar un alumno al realizar acciones sobre esta figura son: que la traza parece una parábola, que siempre $|OB| = |OC|$, que el segmento DB siempre mide $1/2$, y que la recta DA es perpendicular a la recta CA. A partir de esta observación, el problema que se podría plantear sería: ¿si una curva está generada por un punto A que se mueve sujeto a las siguientes condiciones: 1) $|OB| = |OC|$, 2) $|DB| = 1/2$, y 3) la recta DA es perpendicular a la recta CA, la traza de este punto describe una parábola de fórmula $y = x^2$?

Si se aplica el teorema de la altura al triángulo de la Figura Nº 8 se cumple: $\frac{x}{1/2} = \frac{2y}{x} \Rightarrow x^2 = y$.

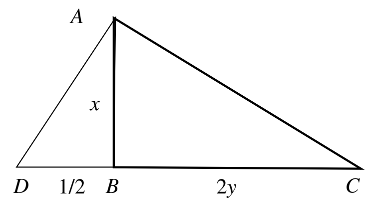


Figura Nº 8.

La Figura Nº 7 realizada con el programa Cabri-géomètre se puede variar de manera que permita una generalización extensiva. En efecto, basta modificar la posición del punto M sobre la recta horizontal, modificando así la longitud del segmento OM, tal que ésta determine el valor de k en la fórmula $y = kx^2$.

En la figura Nº 9, la longitud de OM es 2 y la parábola es $y = 2x^2$, siendo el segmento OB de igual longitud que el segmento OC. En la Figura Nº 10, la longitud de OM es 0,5 y la parábola es $y = 0,5x^2$, siendo el segmento OB de igual longitud que el segmento OC. En general, si se varía el punto M de manera que el segmento $OM = k$, la parábola que aparece está representada por $y = kx^2$ y $|OC| = |OB|$.

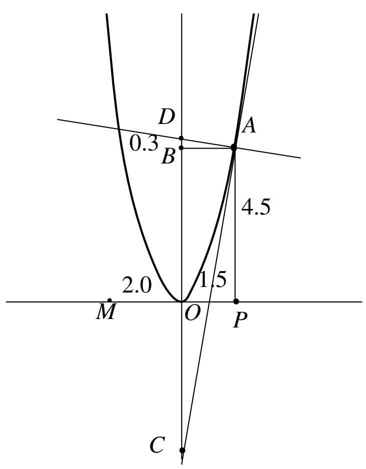


Figura Nº 9.

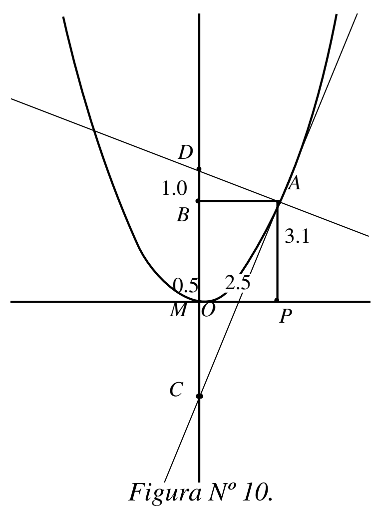


Figura Nº 10.

A partir de esta observación, el problema que se podría plantear sería: ¿si una curva está generada por un punto A que se mueve sujeto a las siguientes condiciones: 1) $|OC| = |OB|$, 2) DB constante para cada valor de OM, y 3) la recta DA es perpendicular a la recta CA, la traza de este punto describe una parábola de fórmula $y = kx^2$?

Si se aplica el teorema de la altura al triángulo ADC, se cumple $x^2 = 2y \cdot DB \Rightarrow y = \frac{X^2}{2.DB}$ y si se considera que $k = \frac{1}{2.DB}$ se tiene $y = kx^2$.

IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Una vez respuesta la pregunta sobre la parábola, voy a comentar algunos aspectos de tipo didáctico.

Lo primero que hay que destacar es que las actividades anteriores pueden ser la base para diseñar una secuencia de actividades para trabajar con los alumnos.

El segundo aspecto a destacar es que en los comentarios anteriores se han tratado dos de los problemas que más interesaron a los matemáticos del siglo XVII:

- el problema de las tangentes: hallar un método que permitiera construir la normal y la tangente en un punto de una curva dada; y,
- el problema inverso: determinar una curva a partir de una propiedad que cumplan todas las tangentes.

La importancia que tuvo en el siglo XVII el problema de hallar métodos para construir la normal y la tangente en un punto de una curva se puede constatar en el párrafo siguiente de *La Géométrie*:

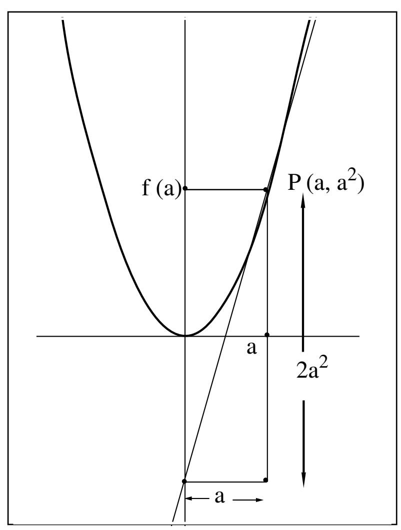
> Por ello estimo haber expuesto cuanto se requiere en un estudio introductorio para realizar el análisis de las curvas, cuando haya desarrollado el procedimiento para trazar líneas rectas que formen ángulos rectos sobre cualesquiera de los puntos de aquellas que se elijan. Me atrevo a afirmar que éste es el problema cuyo conocimiento es más útil y no sólo el más general que yo conozco, sino también el que más he deseado llegar a conocer (Descartes 1981, p. 316).

En el siglo XVII, el problema de hallar la tangente se entendía de una manera muy diferente de cómo se explica actualmente. En efecto, el procedimiento para hallar la recta tangente $y = mx + n$ a la gráfica de una función f en $x = a$ que se enseña actualmente a los alumnos consiste en:

1) Buscar $f'(a)$, que es la pendiente m de la recta tangente, utilizando la técnica de la derivación.
2) Buscar la segunda coordenada del punto de tangencia $(a, f(a))$ substituyendo x por a en la fórmula de la función.
3) Hallar n sabiendo que la recta tangente pasa por el punto de tangencia.

Una aplicación de lo comentado anteriormente a la enseñanza del cálculo diferencial se describe en Font (2000) y consiste en proponer a los alumnos la siguiente secuencia de actividades:

1) Suponer que en una construcción similar a las anteriores la traza es la parábola expresada por $f(x) = x^2$.
2) Trabajar con la construcción anterior para que descubran un invariante del tipo: en la parábola $f(x) = x^2$ la recta tangente en P corta al eje de ordenadas en un punto C tal que la longitud del segmento OC es la ordenada de P.
3) Simbolizar este invariante de la manera siguiente:



4) Demostrar que la función derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$.

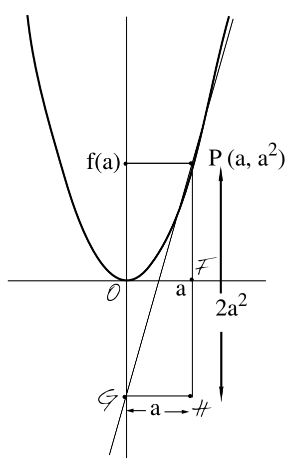
Esta secuencia de actividades está a mitad de camino entre el problema de la tangente y su inverso. No es exactamente el problema de la tangente, puesto que aquí ya se tiene construida; ni es el problema inverso, ya que se conoce la expresión simbólica de $f(x)$.

Realizar la construcción con ordenador permite las acciones de los alumnos sobre la construcción y les facilita encontrar una condición que cumplen todas las tangentes (utilizando el triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente, o bien otro semejante). Construcciones de este tipo permiten que los alumnos calculen funciones derivadas sin necesidad de utilizar límites, siempre que se haya trabajado previamente la interpretación geométrica de la derivada en un punto. En efecto, la simbolización de esta condición en el caso de la parábola lleva a establecer una especie de casi-ecuación diferencial (entendida en sentido amplio) que permite calcular $f'(x)$ sin necesidad de utilizar el cálculo integral.

$$f'(x) = \frac{2f(x)}{x} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2}{x} \quad \Rightarrow f'(x) = 2x\,.$$

Terminaré con una respuesta de una alumna a la pregunta del punto 4 de la secuencia anterior:

Demuestra que la derivada de $f(x) = x^2$ es $f'(x) = 2x$.



a) "GH = a porque hay la misma distancia"
"PF = a^2 porque la imagen de a en la función $f(x) = x^2$ es a^2"
"PH = $2a^2$ porque es el doble de FP".

b) $p = \frac{2a^2}{a} = 2a$
$f'(a) = 2a$

c) $a = x$
$p = \frac{2x^2}{x} = 2x$
$f'(x) = 2x$

En la respuesta de la alumna en b) la *p* minúscula representa la pendiente de la recta tangente.

En la respuesta de la alumna en c) la igualdad $f'(x) = 2x$, está expresando que el razonamiento de los apartados a) y b) son válidos para cualquier valor de a.

REFERENCIAS

Brown, T. (1996). The phenomenology o*f the mathematics classroom. Educational Studies in Mathematics, 31,* 115-150.

Descartes, R. (1981). *Discurso del método, Dióptrica, Meteoros y Geometría.* Madrid: Alfaguara (Obra publicada en 1637).

Duval, R. (1995). S*émiosis et penseé humaine.* Berna: Peter Lang S.A.

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de gràfiques* (tesis doctoral, no publicada). Universitat de Barcelona.

García, F. (1994). Funciones de la calculadora gráfica. *Revista Uno, 2,* 103-108.

Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale NJ: Erlbaum A.P.

Kaput, J. (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159-195). Hillsdale NJ: Erlbaum A.P.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Lakatos, I. (1983). *La metodología de los programas de investigación científica.* Madrid: Alianza Universidad.

Lakoff, G. y Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana.* Madrid: Cátedra.

Lakoff, G. y Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. En T. Nakaora y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3-22). Hiroshima: Hiroshima University.

Romero, I. y Rico, L. (1999). Representación y comprensión del concepto de número real. Una experiencia didáctica en secundaria. *Revista EMA, 4* (2), 117-151.

Shell Center for Mathematics Education (1990). *El lenguaje de funciones y las gráficas.* Madrid: MEC.

APÉNDICE: CONSTRUCCIÓN DE LA PARÁBOLA EN CABRI-GÉOMÈTRE

1) Dibuje una recta horizontal (eje de abscisas) y seleccione un punto sobre esta (el origen de coordenadas *O*).

2) Construya una recta perpendicular que pasa por *O* (eje de ordenadas).

3) Seleccione un punto sobre la recta horizontal (punto *P*).

4) Construya y mida el segmento *OP*.

5) Seleccione un punto sobre el eje de ordenadas (punto S con ordenada negativa, que no aparece en la construcción final), de manera que el segmento *OS* mida 1.

6) Construya el segmento *SP* y una recta perpendicular a éste que pase por *P*.

7) Determine la intersección de esta recta con el eje de ordenadas (punto *T* que no aparece en la construcción final).

8) Construya la perpendicular al eje de abscisas que pasa por *P*.

9) Construya una circunferencia de centro O y radio el segmento *OS*.

10) Determine la intersección de la circunferencia con el eje de ordenadas (además del punto *S* aparece el punto *Y* que no aparece en la construcción final).

11) Determine un punto sobre el eje de abscisas (el punto *M*), construya y mida el segmento *OM*.

12) Construya la recta que pasa por *M* y por *Y*.

13) Trace la paralela a la recta anterior que pasa por *T*.

14) Determine la intersección de la recta anterior con el eje de abscisas (punto *Z* que no aparece en la construcción final).

15) Construya la circunferencia de centro *O* y radio el segmento *OZ*.

16) Determine la intersección de la circunferencia anterior con el eje de ordenadas (puntos *B* y *C*).

17) Trace la perpendicular al eje de ordenadas que pasa por *B*.

18) Determine la intersección de la recta anterior con la recta perpendicular al eje de abscisas que pasa por *P* (punto *A*), trace y mida el segmento *AP*.

19) Construya la recta que pasa por *A* y *C*.

20) Trace la perpendicular a la recta anterior que pasa por *A*, y determine la intersección de ésta con el eje de ordenadas (punto *D*).

21) Mida el segmento *BD*.

22) Construya los segmentos *DA* y *BA*.

23) Construya el lugar geométrico generado por *A* al mover *P*.

24) Oculte las dos circunferencias, las rectas horizontal y vertical que pasan por *A*, las rectas que pasan por *T*, la recta *AD*, la recta *MY*, y los puntos *Z*, *Y*, *S*, *T*.

Vicenç Font
Departamento de Didáctica de las CCEE y de la Matemática
Universidad de Barcelona
E- mail: vfont@d5.ub.es